

مقدمة في

# المعادلات النفاضية

الدكتور سريالين الكورس

مركز النشر العالمي  
جامعة الملك عبد العزيز  
جدة

0238267



Philosophica Academic

اهداءات ١٩٩٤  
المملكة العربية  
السعودية





# مقدمة في المعادلات النفاضية

الدكتور سريالين السريالين

مركز النشر العالمي  
جامعة الملك عبد العزيز  
صوب ١٥٤٠ - جدة ٢١٤٤١  
(الطبعة الأولى: ١٤٢٥ هـ)

© ١٤١٣ هـ (١٩٩٢ م) جامعة الملك عبد العزيز  
جميع حقوق الطبع محفوظة . غير مصرح بطبع أي جزء من أجزاء هذا  
الكتاب ، أو تخزينه في أي نظام لحزن المعلومات واسترجاعها ، أو نقله على  
أية هيئة أو بآية وسيلة ، سواء أكانت إلكترونية ، أم شرائط ممغنطة ، أم  
ميكانيكية ، أم استنساخاً ، أم تسجيلاً ، أم غير ذلك من الوسائل إلا  
بإذن كتابي من صاحب حق الطبع .  
الطبعة الأولى : ١٤١٣ هـ (١٩٩٢ م)

جامعة الملك عبد العزيز - عمادة شؤون المكتبات  
بيان الفهرسة أثناء النشر

- سحاب ، سالم بن أحمد .  
مقدمة في المعادلات التفاضلية / سالم بن سحاب - جدة :  
جامعة الملك عبد العزيز ، مركز النشر العلمي ، ١٤١٢ هـ .  
أ - ن ، ٣٣٤ ص ، ١٧ × ٢٤ سم  
يشتمل عل : مراجع متتقة - ثبت بالمصطلحات العلمية .  
١ . المعادلات التفاضلية . أ . العنوان .  
ب . جامعة الملك عبد العزيز ، مركز النشر العلمي . ٥١٥ر٣٥

الإهداء

إلى زوجتي ورفيقة دربي ...

إلى التي أعطت وتعطي بلا حدود ...

أسأل الله الكريم لها ولي الرضوان والجنة ...

وأسأله لنا الذرية الصالحة والخاتمة الحسنة ...





## تقديم

الحمد لله وكفى ، وسلام على عباده الذين اصطفى ، أما بعد :  
فلا يكاد يخفى على رجال التربية والتعليم مدى الحاجة الماسة الى بناء مكتبة عربية زاخرة بالعلم والمعرفة في شتى التخصصات والمجالات .  
وهذا الكتاب خطوة على الطريق الطويل ، أرجو من الله العلي الكبير أن يبارك فيها كما بارك في كثير ممن سبقوها .

وتعد المعادلات التفاضلية العادية من المواد الاساسية التي يركز عليها نمو الطالب العلمي في المجالات الرياضية والتطبيقية والهندسية . فهي تربط بين تجريد النظريات وواقع التطبيقات بأسلوب علمي عملي سلس .  
ولما كانت المادة ذات طبيعة علمية تخدم قاعدة عريضة من الطلبة ، فقد أثرت الابتعاد عن غلو التنظير والاكتفاء بالإشارة إلى التجريد الرياضي بالقدر القليل المناسب سواء كان ذلك نصاً أو برهاناً .

وقد راعى هذا الكتاب المادة العلمية المطلوبة لمنهج يعادل ثلاث ساعات فصلية وربما يزيد قليلاً . أما المحتوى فربما كان قياسياً لكثير من جامعات العالم وهو خاضع للمحتويات التي أقرها قسم الرياضيات في جامعة الملك عبد العزيز بجدة .  
أما الإطار العام لهذا الكتاب فقد حاولت جهدي أن يكون على مستوى يناسب عصرنا هذا من حيث الترتيب والعرض والإخراج مما تشتمل عليه كثير من الكتب الأجنبية الحديثة من جودة في الإخراج وجمال في العرض وأخذ بأساليب التقنية لخدمة التعليم الجامعي من خلال الكتاب العلمي والمعرفي . هذا ويمكن القول بأن الكتاب يتضمن الخصائص التالية :

- لكل باب مقدمة موجزة تعطي نبذة مختصرة عن محتويات ذلك الباب .
- تلخيص خطوات الحل حتى يسهل الرجوع إليها والتركيز عليها ، وفي ذلك تقليل من عناء البحث بين السطور المتتالية المتشابهة ، كما فيه ترتيب وراحة للنظر .
- أمثلة محلولة متعددة ، وكما هو متوقع منها ، تشرح الخطوات العامة للحل كما تتعرض لبعض الصعاب التي قد تصادف الطالب عند التطبيق .

- تمارين كثيرة تساعد الطالب على الممارسة لرفع مستوى كفاءته وقدراته العلمية في المادة .

- ملخص موجز في نهاية كل باب يعطي خلاصة واقية لما اشتمل عليه الباب من أفكار رئيسية هامة .

- تمارين عامة في نهاية كل باب . وهي مصدر هام للأستاذ والطالب . فمنها يمكن انتقاء أسئلة الامتحانات ، ومنها ما يعين الطالب على حسن الاستذكار لهذه الامتحانات . وهي عموماً كثيرة في عددها شاملة في محتواها .

وختاماً فإنني أتوجه إلى الله بالثناء والحمد ثم بالشكر والعرفان لكل من ساهم ويساهم في إخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود أفراداً ومجالس ولجاناً سواء بالكلمة النيرة أو بالفكرة الجيدة أو بالرأي السديد أو الطباعة المتقنة أو الإخراج في ثوب قشيب ، وأخص بالشكر المجلس العلمي بالجامعة وكذلك مركز النشر العلمي لما يبذله من جهد في سبيل إخراج الكتاب العلمي من حيز الفكرة إلى عالم التنفيذ .

ولله الحمد من قبل ومن بعد .

المؤلف

ذي القعدة ١٤١٢هـ

## المحتويات

١	الباب الأول : مقدمة للمعادلات التفاضلية
٣	١-١ تمهيد وتعريفات أساسية
٧	٢-١ منشأ المعادلات التفاضلية
٨	٣-١ المعادلة التفاضلية لعائلة من المنحنيات
١٢	٤-١ ملخص الباب
١٢	٥-١ تقارين عامة
١٥	الباب الثاني : المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى
١٧	١-٢ مقدمة
١٨	٢-٢ نظرية وجود الحل ووحدانيته
١٩	٣-٢ المعادلات ذات المتغيرات المنفصلة
٢٥	٤-٢ المعادلات التامة
٣٠	٥-٢ المعادلات المتجانسة
٣٦	٦-٢ المعادلات الخطية
٤٣	٧-٢ ملخص الباب
٤٤	٨-٢ تقارين عامة
٤٧	الباب الثالث : تطبيقات على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى
٤٩	١-٣ مقدمة
٥٠	٢-٣ تطبيقات رياضية

٥٢	٣-٣ تطبيقات فيزيائية
٥٧	٤-٣ تطبيقات كيميائية
٥٩	٥-٣ تطبيقات بيولوجية
٦١	٦-٣ تطبيقات إحصائية
٦٣	٧-٣ ملخص الباب
٦٣	٨-٣ تمارين عامة
٦٥	الباب الرابع : المزيد عن حل المعادلات ذات الرتبة الأولى
٦٧	١-٤ مقدمة
٦٧	٢-٤ تخمين عامل المكاملة
٧٢	٣-٤ إيجاد عامل المكاملة
٧٨	٤-٤ الإحلال
٨٠	٥-٤ معادلة برنولي
٨٣	٦-٤ المعادلات الخطية ذات المتغيرين
٨٩	٧-٤ ملخص الباب
٩١	٨-٤ تمارين عامة
٩٣	الباب الخامس : المعادلات التفاضلية ذات الرتبة العليا
٩٥	١-٥ مقدمة
٩٧	٢-٥ الاستقلال الخطي ونظرية وجود حل وحيد
٩٩	٣-٥ قيمة فرونسكيان
١٠٢	٤-٥ الحل العام للمعادلة المتجانسة
١٠٤	٥-٥ الحل العام للمعادلة غير المتجانسة
١٠٧	٦-٥ المؤثر التفاضلي
١١٢	٧-٥ المزيد عن المؤثر التفاضلي
١١٦	٨-٥ ملخص الباب

١١٩	الباب السادس : المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة
١٢١	١-٦ مقدمة
١٢٢	٢-٦ المعادلة المساعدة : تعريفها وأهميتها
١٢٣	٣-٦ المعادلة المساعدة ذات الجذور المختلفة
١٢٦	٤-٦ المعادلة المساعدة ذات الجذور المكررة
١٣٠	٥-٦ المعادلة المساعدة ذات الجذور المركبة
١٣٦	٦-٦ ملخص الباب
١٣٧	٧-٦ تمارين عامة
١٤١	الباب السابع : المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة
١٤٣	١-٧ مقدمة
١٤٤	٢-٧ إيجاد معادلة متجانسة بمعلومية الحل الخاص
١٤٨	٣-٧ طريقة المعاملات غير المعينة
١٥٦	٤-٧ طريقة التخمين وقاعدة التركيب
١٦٥	٥-٧ ملخص الباب
١٦٧	الباب الثامن : المعادلات الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية
١٦٩	١-٨ مقدمة
١٦٩	٢-٨ طريقة اختزال الرتبة
١٧٧	٣-٨ طريقة تغيير الوسطاء
١٨٦	٤-٨ ملخص الباب
١٨٧	٥-٨ تمارين عامة

١٨٩	الباب التاسع : حلول متمسلسات القوى
١٩١	١-٩ مقدمة
١٩٦	٢-٩ النقاط المعادية والنقاط الشاذة
١٩٨	٣-٩ حلول المعادلات قرب نقطة عادية
٢٠٨	٤-٩ ملخص الباب
٢٠٩	٥-٩ تمارين عامة
٢١١	الباب العاشر : الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية
٢١٣	١-١٠ مقدمة
٢١٤	٢-١٠ طريقة الحذف الأولي
٢١٨	٣-١٠ حلول الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة من الرتبة الأولى
٢٢٤	٤-١٠ ملخص الباب
٢٢٧	الباب الحادي عشر : تطبيقات على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية
٢٢٩	١-١١ مقدمة
٢٢٩	٢-١١ الإهتزازات الميكانيكية والحركة التوافقية البسيطة
٢٣٣	٣-١١ الإهتزازات غير المتخامدة
٢٣٧	٤-١١ الرنين
٢٤٠	٥-١١ الإهتزازات المتخامدة
٢٤٧	٦-١١ البندول البسيط
٢٤٩	٧-١١ ألدوائر الكهربائية البسيطة

٢٥٥	الباب الثاني عشر : تحويلات لابلاس
٢٥٧	١-١٢ مقدمة
٢٥٨	٢-١٢ تعريف وجود تحويل لابلاس
٢٦٦	٣-١٢ خواص تحويل لابلاس
٢٧٠	٤-١٢ تحويل لابلاس العكسي
٢٧٩	٥-١٢ حل مسألة القيمة الابتدائية
٢٨٦	٦-١٢ ملخص الباب
٢٨٧	٧-١٢ تمارين عامة
٢٨٩	مراجع منتقاة
٢٩٣	أجوبة التمارين
٣٢١	ثبت المصطلحات العلمية
٣٢٩	الكشاف





## الباب الأول

# مقدمة للمعادلات التفاضلية

■ تمهيد وتعاريفات أساسية ■ منشأ المعادلات التفاضلية ■ المعادلات التفاضلية لعائلة من المتغيرات ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .



## ١-١ تمهيد وتعريفات أساسية

يلجأ الباحثون في كثير من المسائل العلمية والهندسية إلى تصميم نموذج رياضي للمساعدة في فهم الظاهرة الطبيعية . وهذه النماذج غالبا ما تؤدي إلى صياغة معادلة تربط بين دالة مجهولة وبعض من مشتقاتها . وهذه العلاقة أو الرابطة هي ما يُسمى بالمعادلة التفاضلية .

**تعريف ١ .** المعادلة التفاضلية العادية هي معادلة رياضية تحتوي علي مشتقات متغير تابع  $y$  بالنسبة لمتغير مستقل واحد  $x$  .

ويهدف هذا الكتاب إلى دراسة معظم الطرق المختلفة المتوافرة لحل بعض المعادلات التفاضلية ، أي أننا نسعى إلى إيجاد الدالة أو الدوال التي تحقق المعادلة التفاضلية . وفيما يلي بعض الامثلة على المعادلات التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \quad (2)$$

$$(t^2 + x^2)dt - 2tx \, dx = 0 \quad (3)$$

$$y'' - 7(y')^2 - 3xy = x \quad (4)$$

$$2y''' + x^2y'' - y' = -x \quad (5)$$

وتُصنّف المعادلات التفاضلية حسب الرتبة ، فيقال إن رتبته هي رتبة أكبر مشتقه تظهر في المعادلة . فمثلا المعادلة ( 1 ) من الرتبة الاولى ، وكذلك المعادلة ( 3 ) . أما المعادلتان ( 2 ) ، ( 4 ) فمن الرتبة الثانية ، وأما المعادلة ( 5 ) فمن الرتبة الثالثة .

ويقال إن المعادلة التفاضلية العادية خطية إذا كانت في الصورة التالية :

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = R(x)$$

ويُلاحظ إن هذه المعادلة تتميز : ( أولا ) بأن المتغير التابع  $y$  وجميع مشتقاته من الدرجة الاولى ، أي أن  $As y$  أو مشتقاته هو 1 ، ( ثانيا ) أن المعاملات تعتمد على المتغير المستقل  $x$  فقط .

ويقال إن المعادلة التفاضلية العادية غير خطية إذا لم تكن خطية .

تعريف ٢ . لتكن  $y = y(x)$  دالة معرفة على فترة مفتوحة  $I$  وقابلة للاشتقاق عدد  $n$  من المرات على نفس الفترة  $I$  . إذا كانت  $y$  تحقق على الفترة  $I$  معادلة تفاضلية من الرتبة  $n$  ، فإن  $y$  تُسمى عندئذ حلا للمعادلة على هذه الفترة .

مثال ١ . الدالة  $y = \frac{x^4}{16}$  تعتبر حلا للمعادلة غير الخطية

$$\frac{dy}{dx} - x y^{1/2} = 0$$

في الفترة  $-\infty < x < \infty$  . ذلك أن

$$\frac{dy}{dx} = 4 \frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - x y^{1/2} &= \frac{x^3}{4} - x \left( \frac{x^4}{16} \right)^{1/2} \\ &= \frac{x^3}{4} - x \frac{x^2}{4} = 0 \end{aligned}$$

لأي عدد حقيقي  $x$  . لاحظ أن الدالة  $y = 0$  تعتبر حلا بديهياً .

## مثال ٢ . المعادلة التفاضلية

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 = 0$$

وكذلك المعادلة التفاضلية

$$2(y')^2 + y^2 + 1 = 0$$

ليس لهما حلول حقيقية . لماذا يا ترى ؟

ويمكن أيضا تصنيف حلول المعادلات التفاضلية إلى نوعين : حل صريح ، وحل ضمني . فالحل الصريح هو إعطاء التابع بمعلومية المتغير المستقل . وأما الحل الضمني فهو عبارة عن علاقة في متغيرين  $G(x,y)=0$  ينتج عن اشتقاقها ضمنا المعادلة التفاضلية الأصلية .

## مثال ٣ . الدالة $y = x e^x$ تعتبر حلا صريحا للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 2y' + y = 0 ,$$

وللتأكد من ذلك نجد أولا

$$y' = x e^x + e^x$$

ثم نجد

$$y'' = x e^x + 2 e^x$$

وبالتعويض نحصل على

$$y'' - 2y' + y = (x e^x + 2 e^x) - 2(x e^x + e^x) + x e^x = 0$$

لأي عدد حقيقي  $x$  .

## مثال ٤ . العلاقة

$$G(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

على الفترة  $-2 < x < 2$  تمتثل حلا ضمنا للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ذلك أن الاشتقاق الضمني للعلاقة بالنسبة للمتغير  $x$  يعطي

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

ومنه

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

## تمارين

حدد رتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية مبيناً فيما إذا كانت خطية أم لا :

$$(1) \frac{d^2y}{dx^2} + p^2 x = 0$$

$$(2) \frac{d^2w}{dt^2} = k^2 \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$(3) yy' = \cos x$$

$$(4) y''' - 3y' + 2y = 0$$

$$(5) (w'')^2 - 2(w')^4 + y w = 0$$

$$(6) y'' - 2y' + 3y = x^2 - \sin x$$

$$(7) x (y'')^2 + y^2 = 0$$

$$(8) -3y''' - y + 2x^2 = \cos x$$

اثبت أن الدالة ( الدوال ) المعطاة في كل مما يلي هي حل للمعادلة التفاضلية المكتوبة

على يسارها ، وحيثما وجد  $c_1, c_2$  فهما يرمزان إلى ثوابت اختيارية :

$$(9) y'' - y = 0; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \cosh x$$

$$(10) y' = 25 + y^2; \quad y = 5 \tan 5x$$

$$(11) 2x^2 y'' + 3xy' - y = 0; \quad x > 0; \quad y_1(x) = c_1 \sqrt{x}, \quad y_2(x) = c_2 x^{-1}$$

$$(12) x^2 dy + 2xy dx = 0; \quad y = -x^{-2}$$

$$(13) \frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}; \quad y = e^{3x} + 10e^{2x}$$

$$(14) (y')^3 + xy' = y; \quad y = x + 1$$

$$(15) \frac{dx}{dt} = (2-x)(1-x); \quad \ln \left( \frac{2-x}{1-x} \right) = t$$

$$(16) y' - \frac{y}{x} = 1; \quad y = x \ln x; \quad x > 0$$

## ٢-١ منشأ المعادلات التفاضلية

قد لا يكون من المناسب أن يجتاز الطالب مادة المعادلات التفاضلية دون أن يحظى بالحد الأدنى من المعرفة عن بعض أساليب نشوء هذه المادة .

إن صياغة مسألة ما في شكل رياضي له فوائد جمة فهي تحددنا أولا إلى أن نسرد بوضوح المسألة التي نحن بصدد حلها . فأي مسألة في عالم الواقع تشوبها عمليات معقدة ذات علاقات كثيرة ومختلفة ، وقبل أن نعالجها رياضيا لابد لنا أن نحدد المتغيرات التي ستوضع موضع الاعتبار والأخرى التي نتجاهلها . وعادة ما نتمكن من وضع هذه المتغيرات والعلاقات القائمة بينها في صيغ قوانين ونظريات ومعادلات تشكل في مجموعها الشكل المثالي للنموذج الرياضي المطلوب .

إن المطلوب هو صياغة المسألة الناتجة عن التفاعلات القائمة في عالم الواقع في صورة رياضية مناسبة . وهذا يتطلب فهما حقيقيا لأبعاد المشكلة من الناحية الحقيقية - كما في عالم الواقع - كما تتطلب فهما وإلماما بالأدوات الرياضية التي يمكن أن نقيدها منها في إيجاد الحل المناسب .

ولعل مادة المعادلات التفاضلية من أهم الوسائل التي تزخر بها المكتبة الرياضية لإيجاد الحل المناسب رياضيا ومن ثم ترجمته إلى عالم الواقع إلى مادة مكتوبة مفيدة تساهم في حل المسألة المطلوبة على الوجه الأقرب إلى تحقيق الفائدة المرجوة .

وفي الباب الثالث من هذا الكتاب أمثلة مختلفة من عالم الواقع يتضح من خلالها كيفية التعامل مع مسألة إنسانية أو علمية بحث من منظور رياضي تلعب فيه مادة المعادلات التفاضلية دورا أساسيا هاما .

وفي البند التالي نتحدث عن كيفية إيجاد المعادلة التفاضلية لعائلة من المنحنيات التي لها بعض الخواص التي تميزها .

## ٣-١ المعادلة التفاضلية لعائلة من المنحنيات

إن الهدف الأساسي من هذا الكتاب هو الوصول بالطالب إلى مرحلة التمكن من حل بعض الأنواع الشائعة من المعادلات التفاضلية . وبالتجربة نجد أن الوصول إلى المعادلة التفاضلية في حد ذاتها يمكن أن يتم من طرق مختلفة ، إلا أننا في هذا البند سنبدأ بعلاقة تتضمن ثوابت اختيارية ، ثم ننطلق من هذه العلاقة لنجد المعادلة التفاضلية التي هي أصل العلاقة ، وذلك عن طريق التخلص من الثوابت الاختيارية . وبمعنى آخر فإننا نبدأ بالعمل المعطى لنصل إلى أصل المسألة .

وهناك طرق مختلفة للتخلص من الثوابت الاختيارية تختلف باختلاف موقع هذه الثوابت من العلاقة المعطاة . فالطريقة المثلى لحل مسألة ما قد لا تجدي لحل مسألة أخرى ، إلا أن هناك حقيقة واحدة تظل ماثلة ، وهي أن كل اشتقاق للعلاقة المعطاة ينتج عنها علاقة جديدة ، وعليه فإن عدد مرات الاشتقاق يجب أن يساوي عدد الثوابت الاختيارية التي يجب إلزائها . وفي كل مرة علينا أن نجد المعادلة التفاضلية التي لها الخصائص التالية :

- (أ) أن تكون ذات رتبة مساوية لعدد الثوابت الاختيارية الموجودة في العلاقة المعطاة .
- (ب) أن تكون متفقة مع العلاقة الأصلية ، أي أن حلها يؤدي إلى العلاقة الأصلية .
- (ج) أن تكون خالية من الثوابت الاختيارية .

ولنبدأ الآن باستعراض بعض الأمثلة على كيفية التخلص من الثوابت الاختيارية والوصول إلى المعادلة التفاضلية التي تمثل العلاقة المعطاة .

مثال ١ . التخلص من الثابتين الاختياريين في العلاقة

$$y = c_1 e^x + c_2 .$$

الحل : الاشتقاقان الأول والثاني للعلاقة ينتجان المعادلتين

$$y' = c_1 e^x$$

$$y'' = c_1 e^x$$



وعليه فالمعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$y'' = y'$$

أو

$$y'' - y' = 0$$

والواقع أن العلاقة المعطاة تمثل في حقيقة الأمر عائلة من المنحنيات ذات عدد من الوسطاء مساو لعدد الثوابت الاختيارية . فمثلا العلاقة المعطاة في المثال السابق تمثل عائلة من المنحنيات ذات وسيطين ، بينما تمثل العلاقة

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = 2c^2$$

عائلة من المنحنيات ذات وسيط واحد فقط . وهي تمثل في حقيقة الأمر معادلة مجموعة الدوائر التي تقع مراكزها على الخط المستقيم  $y = x$  وتمر في نفس الوقت بنقطة الأصل .

مثال ٢ . أوجد المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات التي تمثلها المعادلة  $y = cx^3$  .

الحل : حيث إن المعادلة تحوي وسيطا واحدا فقط ، فالمتوقع أن ننتهي إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى . وبمفاضلة الطرفين نحصل على

$$y' = 3cx^2$$

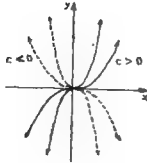
لكن  $c = \frac{y}{x^3}$  مما يؤدي إلى

$$y' = 3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2 = \frac{3y}{x}$$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$xy' - 3y = 0$$

وفي الشكل ١-١ تبدو عائلة المنحنيات التي تمثلها المعادلة المعطاة .



الشكل ١-١

عائلة المنحنيات التي تمثلها المعادلة  $y = cx^3$

مثال ٣. أوجد المعادلة التفاضلية للعائلة التالية من المنحنيات ذات الثابتين

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x \quad (1)$$

الحل : بإجراء الاشتقاقين الأول والثاني نحصل على

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 1$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (2)$$

ب طرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على

$$y'' - y = -x.$$

مثال ٤. أوجد المعادلة التفاضلية التي تصف عائلة الدوائر التي تمر بنقطة الأصل.

الحل : كما يظهر من الشكل ٢-١ ، فإن الشكل العام لمعادلة هذه الدوائر هو

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = (\sqrt{h^2 + k^2})^2$$

أو

$$x^2 - 2hx + y^2 - 2ky = 0 \quad (3)$$

وباشتقاق المعادلة (3) حزمين مرتين نحصل إلى

$$x - h + y y' - k y' = 0, \quad (4)$$

$$1 + y y'' + (y')^2 - k y'' = 0. \quad (5)$$

وباستعمال المعادلة الأصلية لإيجاد قيمة  $h$  نحصل إلى

$$h = \frac{x^2 + y^2 - 2ky}{2x}$$

وبالتعويض في (4) ينتج لدينا أن

$$x - \frac{x^2 + y^2 - 2ky}{2x} + y y' - k y' = 0 \quad (6)$$

ثم نجد قيمة  $k$  من (6) لنحصل على

$$k = \frac{x^2 - y^2 + 2xyy'}{2(xy' - y)} \quad (7)$$

وبالتعويض من (7) في المعادلة (5) نحصل على المعادلة غير الخطية

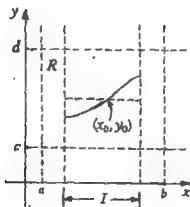
$$1 + y y'' + (y')^2 - \frac{(x^2 - y^2 + 2xyy')}{2(xy' - y)} y'' = 0$$

أو

$$(x^2 + y^2) y'' + 2[(y')^2 + 1](y - xy') = 0$$

هذا ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة باشتقاق طرفي المعادلة (7) باستعمال

قانون النسبة للاشتقاق .



الشكل ٢-١

عائلة الدوائر التي تمر بنقطة الأصل

## ٤-١ ملخص الباب

في هذا الباب عالجنا بعض التعريفات والمصطلحات الأساسية للمعادلات التفاضلية العادية ، فقد صنفنا المعادلات التفاضلية العادية حسب الرتبة ، وكونها خطية أو غير خطية .

أما حل المعادلة التفاضلية العادية فهو أي دالة أو علاقة ذات عدد كاف من الاشتقاقات ، والتي تحقق المعادلة في فترة معينة .

وحل المعادلة إما أن يكون صريحا وهو الذي يحقق المعادلة على فترة ما، وإما أن يكون ضمنيا ، وهو عبارة عن علاقة ينتج عنها دالة ضمنية تشكل حلا ضمنيا للمعادلة .

وفي البند الثالث عالجنا طريقة إيجاد المعادلة التفاضلية لعائلة من المنحنيات من طريق التخلص من الثوابت الموجودة في المعادلة الأصلية للعائلة والتي يساري مددها عدد مرات الاشتقاق اللازمة للتخلص منها .

## ٥-١ تعاريف عامة

تخلص من الثوابت الاختيارية في كل مما يلي :

$$(1) \quad x \sin y + x^2 y = c$$

$$(2) \quad x y^2 - 1 = c y$$

$$(3) \quad x = c t + c^2 - 1$$

$$(4) \quad y = c_1 + c_2 e^{3x}$$

$$(5) \quad c_1 y^2 = 4ax$$

$$(6) \quad y = e^x + c_2 e^{-x}$$

$$(7) \quad y^2 = 4ax$$

$$(8) \quad y = x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$(9) \quad x = at^2 + bt + c$$

$$(10) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$(11) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

$$(12) y = c_1 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$$

$$(13) y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x$$

$$(14) y = c_1 x^2 + c_2 e^{-x}$$

في كل مما يلي ، أوجد المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المستوية المغطاة بمعادلتها وارسم بعضها من أفراد كل عائلة :

١٥ - عائلة الخطوط المستقيمة التي تمر بنقطة الأصل .

١٦ - عائلة الخطوط المستقيمة التي يتساوى ميلها مع الجزء المقتطع من محور الصادات .

١٧ - عائلة الخطوط المستقيمة ذات البعد الثابت  $p$  من نقطة الأصل .

١٨ - عائلة الدوائر التي تقع مراكزها على محور السينات .

١٩ - عائلة الخطوط المستقيمة التي يتساوى ميلها مع الجزء المقتطع من محور السينات .

٢٠ - عائلة الدوائر المماسية لمحور الصادات وينصف قطر  $r$  .

٢١ - عائلة الدوائر المماسية لمحور السينات .

٢٢ - عائلة الدوائر التي تقع مراكزها على الخط المستقيم  $y = -x$  وتمر بنقطة الأصل .



## الباب الثاني

### المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

- مقدمة ■ نظرية وجود الحل و unicite ■ المعادلات ذات المتغيرات المنفصلة
- المعادلات المتجانسة ■ المعادلات الخطية ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .





## ١-٢ مقدمة

سنعرض في هذا الباب بعض طرق حل أنماط معينة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى . وتعدد طرق الحل المختلفة ناشئ من تعدد أنماط هذه المعادلات التفاضلية . فالطريقة التي تتبع لحل معادلة ما ، قد لا تكون مناسبة لحل معادلة أخرى ، ولهذا فإن على الطالب أن يبني داخل ذهنه الاحساس الرياضي الذي يمكنه من تمييز نمط المعادلة التفاضلية ، وبالتالي اختيار الطريقة المثلى وربما الطريقة الوحيدة لحل المعادلة المعنية .

ولعل هذا الباب من أهم الأبواب التي يستطيع القارئ من خلالها بناء الملكة الذهنية الرياضية التي ستمكّنه من إكمال المشوار مع هذه المادة في يسر يتطلب قدرا طيبا من التركيز والثابرة على حل التمارين التي ترسخ في ذهنه هذه الملكة وهذا الاحساس .

ومن البديهي جدا أن نتمكن من العلم مسبقا بوجود حل للمعادلة التفاضلية أم لا ، إذ أن العلم بإستحالة وجود حل للمعادلة التفاضلية يوفر علينا كثيرا من الجهد الذي سيبدل في محاولة إيجاد هذا الحل . أما إذا علمنا بإمكانية إيجاد حل للمعادلة التفاضلية فعندها يمكن الشروع في إيجاد ذلك الحل . أما الطريقة الأفضل بلا شك فهي الشروع مباشرة في إيجاد الحل ، وبهذا نثبت وجود الحل ونقدم الحل في نفس الوقت ، وذلك من باب ضرب صفرين بحجر واحد .

وفي البند التالي سنعالج تحت أي الظروف المحيطة بالمعادلة التفاضلية يمكننا إيجاز بوجود حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .

## ٢-٢ نظرية وجود الحل ووحدانيته

مسألة القيمة الابتدائية . لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية ذات

المرتبة الأولى

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

الخاصة للشرط الابتدائي

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

حيث  $x_0$  نقطة داخل الفترة  $I$  و  $y_0$  أي عدد حقيقي . إذا كان المطلوب في المسألة حل المعادلة (1) طبقا للشرط (2) ، عندئذ تُسمى هذه المسألة مسألة القيمة الابتدائية ، كما أن الشرط (2) يُسمى الشرط الابتدائي .

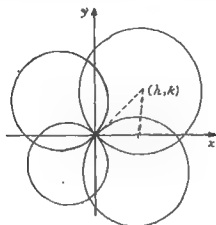
نظرية ١. ليكن  $R$  على شكل مستطيل في المستوى  $x-y$  معرف بالتراجعتين  $a < x < b, c < y < d$  والمحتوي على النقطة  $(x_0, y_0)$  بداخله . إذا كان كل من  $f(x, y)$  و  $\partial f / \partial y$  متصلا على  $R$  ، عندها توجد فترة  $I$  مركزها النقطة  $x_0$  ودالة وحيدة  $y(x)$  معرفة على الفترة  $I$  ومستوفية لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

طبقا للشرط  $y(x_0) = y_0$  .

ولعل هذه النظرية من أشهر نظريات وجود الحل ووحدانيته للمعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ، ويعود السبب إلى أنه من السهل نسبيا التأكد من استمرارية  $f(x, y)$  و  $\partial f / \partial y$  أو عدمه . وكما ذكرنا في البند السابق فعلى القارئ ملاحظة الفارق الفعلي بين العلم بوجود الحل وتقديم حل . فتقديم حل يعني بالضرورة وجود حل للمعادلة التفاضلية . أما العلم بوجود حل قد لا يعني أنه من السهل إيجاد الحل فعلا .

ملاحظة . لعل من المفيد ذكره هنا أن الشروط المذكورة في النظرية كافية لوجود الحل ووحدانيته ، ولكن هذه الشروط ليست ضرورية حتماً فقد لا تنطبق هذه الشروط على معادلة تفاضلية ما ، ومع هذا فقد يحدث أحد هذه الاحتمالات الثلاثة :  
(أ) لا يوجد حل ، (ب) يوجد أكثر من حل ، (ج) يوجد حل وحيد .



الشكل ١-٢

تعريف . إذا كانت الدالة  $y$  حلاً للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى  $y' = f(x, y)$  بحيث تحتوي  $y$  على ثابت اختياري واحد ، عندها تسمى  $y$  حلاً عاماً للمعادلة  $y' = f(x, y)$  .

## ٣-٢ المعادلات ذات المتغيرات المنفصلة

لعل أبسط المعادلات التفاضلية حلاً هي تلك التي يمكن كتابتها على الهيئة

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

والتي يمكن حلها بإيجاد تكامل الطرفين

$$y = \int g(x) dx + c$$

ولنبدأ دراستنا لطرق إيجاد حلول المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى بدراسة المعادلة ذات الشكل العام

$$M dx + N dy = 0$$

حيث  $M, N$  دالتان في كلا المتغيرين  $x, y$  ، أي أن  
 $M = M(x, y)$  ,  $N = N(x, y)$

مثال ١ . المعادلة التفاضلية  $x^2 \sin y \, dy + \frac{y^2}{x} \, dx = 0$  من الرتبة الأولى وفيها

$$M = \frac{y^2}{x} , N = x^2 \sin y$$

لاحظ أن  $M$  ترمز للدالة التي تعمل كمعامل للتفاضلة  $dx$  بينما  $N$  معامل  $dy$  .

تعريف ١ . في المعادلة ( 2 ) إذا كانت  $M$  دالة في  $x$  فقط و  $N$  دالة في  $y$  فقط ، أي إذا كانت المعادلة ( 2 ) على الصورة

$$A(x) \, dx + B(y) \, dy = 0 \quad (3)$$

فنعندئذ يقال إن المعادلة ( 2 ) من ذوات المتغيرات المنفصلة .

طريقة حل المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة

لحل المعادلة

$$A(x) \, dx + B(y) \, dy = 0$$

فلننقلها أولاً في الصورة

$$B(y) \, dy = -A(x) \, dx$$

ثم نكامل الطرفين : الأيسر بالنسبة للمتغير  $y$  ، والأيمن بالنسبة لـ  $x$  لنصل إلى

$$\int B(y) \, dy = - \int A(x) \, dx \quad (4)$$

أو

$$H(y) = G(x) + c$$

حيث  $c$  ثابت اختياري يمكن إيجاد قيمته في حالة وجود شرط ابتدائي .

مثال ٢. أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$(1+x) dy - y dx = 0$$

الحل : بالقسمة على  $y(1+x)$  نحصل على

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{1+x} = 0$$

وبالنقل نحصل إلى

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \ln |1+x| + c_1 = \ln |1+x| + \ln c \\ &= \ln c |1+x| \end{aligned}$$

أو

$$y = c(1+x)$$

حيث  $c > 0$  . وكان بإمكاننا أن نضع  $c_1 = \ln c$  ابتداءً حيث أنه قيمة اختيارية هو الآخر . لاحظ أن لدينا الحرية الكاملة في اختيار الثابت الاختياري المناسب للمسألة التي بين أيدينا ، كان نستعمل  $\ln |c|$  ,  $e^c$  ,  $\sin 2c$  أو  $3c$  إلخ .

مثال ٣. حل المعادلة التفاضلية

$$x y^2 dx + (y+1) e^{-x} dy = 0, \quad y \neq 0$$

الحل : بضمرب المعادلة في  $e^x$  والقسمة على  $y^3$  نحصل على

$$x e^x dx + \frac{(y+1)}{y^3} dy = 0$$

أو

$$x e^x dx + (y^{-2} + y^{-3}) dy = 0$$

بوضع المعادلة في الشكل ( 4 ) ثم مكاملة الطرفين ( بالتجزئة بالنسبة لمعامل  $dx$  )

$$e^x(x-1) = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + c$$

مثال 4 . حل المعادلة التفاضلية التالية الفاصعة للشرط الابتدائي  $y(2) = 3$

$$2xyy' = 1 + y^2$$

الحل : أولاً نضع المعادلة في الشكل ( 4 ) مع ملاحظة أن  $y' = \frac{dy}{dx}$

بالقسمة على  $x(1+y^2)$

$$\frac{2y}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

أو

$$\frac{2y}{1+y^2} dy = \frac{dx}{x}$$

ثم تكامل الطرفين لنصل إلى

$$\ln(1+y^2) = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|$$

أو

$$1+y^2 = cx$$

وبالتعويض من الشرط الابتدائي نصل إلى

$$1+9 = 2c$$

أو

$$c = 5$$

وبالتعويض عن قيمة  $c$  نحصل على

$$1+y^2 = 5x$$

أو

$$y^2 = 5x - 1$$

ومنه

$$y = \sqrt{5x-1}$$

شريطة أن يكون  $x \geq \frac{1}{5}$  .

مثال ٥. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\csc^3 x \, dy = \cot^2 y \, dx$$

حيث  $y = 0$  عندما تساوي  $x$  الصفر .

الحل : بفصل المتغيرات نحصل على

$$\tan^2 y \, dy = \sin^3 x \, dx$$

بتكامل الطرفين نحصل على الحل الضمني الممثل لمجموعة الحلول

$$3 (\tan y - y) = \cos^3 x - 3 \cos x + c$$

وحيث أننا نسعى لتحديد عنصر العائلة الذي يمر بالنقطة  $(0,0)$  ، فإننا نموض لنحصل على

$$0 = 1 - 3 + c$$

أو

$$c = 2$$

إذا الحل الوحيد للمسألة هو الحل الضمني

$$3 (\tan y - y) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$$

ملاحظة . على القارئ أن يلاحظ كيف تم تطبيق نص نظرية وجود الحل ووحدانيته المذكورة في البند السابق لتؤكد أننا وجدنا الحل الضمني الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية ، وهذا الحل متصل لجميع قيم  $y$  .

تمارين

أوجد فيما يلي الحل العام :

$$(1) (1 - x^2)y' = y^2$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \cos 2x$$

$$(3) 2 \, dx + e^{3x} dy = 0$$

$$(4) \sin x \sin y \, dx - \cos x \cos y \, dy = 0$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = \sin x \cos y$$

- (6)  $xy' = 4y$
- (7)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2}$
- (8)  $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$
- (9)  $\frac{dy}{dx} = y(2 + \sin x)$
- (10)  $x^2 dx + y(x-1)dy = 0$
- (11)  $y' = e^{3x+2y}$
- (12)  $x \cos^2 y \, dx + \tan y \, dy = 0$
- (13)  $\frac{dx}{dy} = \frac{1+2y^2}{y \sin x}$
- (14)  $y \sin x e^{\cos x} dx + y^{-1} dy = 0$
- (15)  $(e^{2x} + 4)y' = y e^{2x}$
- (16)  $(1 + \ln x) dx + (1 + \ln y) dy = 0$

حل فيما يلي مسائل القيم الابتدائية التالية :

- (17)  $xyy' = 1 + y^2$  ;  $y(2) = 3$
- (18)  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2y + 1}$  ;  $y(0) = -1$
- (19)  $(e^{-y} + 1) \sin x \, dx = (1 + \cos x) dy$  ;  $y(0) = 0$
- (20)  $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1)$  ;  $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- (21)  $y' = x^2(1 + y)$  ;  $y(0) = 3$
- (22)  $y' = y \sin x$  ;  $y(\pi) = -3$
- (23)  $x^2 y' = y - xy$  ;  $y(-1) = -1$
- (24)  $y' = (1 + y^2) \tan x$  ;  $y(0) = \sqrt{3}$
- (25)  $2y \, dx = 3x \, dy$  ;  $y(2) = 1$
- (26)  $2y \, dx = 3x \, dy$  ;  $y(2) = -1$



## ٢-٤ المعادلات التامة

لاحظنا في البند السابق أنه إذا تمكنا من وضع المعادلة التفاضلية في الصورة

$$A(x) dx + B(y) dy = 0$$

فإنه يمكن إيجاد مجموعة الحل المطلوبة ، وذلك عن طريق إيجاد دالة تكون مشتقتها مساوية للمقدار

$$A(x) dx + B(y) dy$$

وفي هذا البند نحاول أن نطبق نفس الفكرة على معادلات من الشكل

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \quad (1)$$

والتي لا يمكن فصل متغيراتها .

تعريف ١ . تسمى  $M dx + N dy$  تفاضلة تامة في المستطيل  $R$  إذا وجدت دالة  $F$  معرفة على  $R$  بحيث

$$dF = M dx + N dy \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N \quad (3)$$

لجميع النقاط  $(x,y)$  في المستطيل  $R$  ، وفي هذه الحالة يقال أن  $M dx + N dy$  تفاضلة تامة للدالة  $F$  ، ويقال أن المعادلة (1) معادلة تفاضلية تامة . وسنجد بسهولة أن حلها العام يعطى على الصورة

$$F(x,y) = c \quad (4)$$

حيث  $c$  ثابت اختياري .

لاحظ أن اشتقاق المعادلة (4) يؤدي إلى

$$dF = 0$$

أو كما جاء في (2)

$$M dx + N dy = 0$$

وهي المعادلة الأصلية (1) التي نرغب في إيجاد مجموعة حل لها .

أما السؤال الـبيديهي التالي فهو : كيف نستطيع أن نعرف ما إذا كانت  $M dx + N dy$  تفاضلة تامة أم لا ؟ وإذا ما كانت تامة كيف نجد الدالة  $F$  التي تمثل مجموعة حل للمعادلة ؟

وسنحاول الإجابة على هذين السؤالين في الأسطر التالية :

إختبار تمام المعادلة

نظرية ١. بفترض أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين  $M(x,y)$  ,  $N(x,y)$  متصلة في المستطيل  $R$  , فإن الصورة

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy \quad (5)$$

تشكل تفاضلة تامة لدالة  $F$  إذا وفقط إذا كان

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (6)$$

لجميع النقاط  $(x,y)$  في المستطيل  $R$  .

البرهان : سنبرهن أن الشرط (6) ضروري , أي أنه إذا كانت (5) تفاضلة تامة لدالة  $F$  فلا بد أن تتحقق (6) , وحيث أن (5) تفاضلة تامة لدالة  $F$  , فإن

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad N = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (7)$$

وباستعمال (7) نحصل على

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

وحيث أن المشتقات الجزئية التي من الرتبة الأولى للدالتين  $M$  ,  $N$  متصلة في  $R$  , فإننا نجد أن

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

ولاثبات كفاية الشرط نقترح أن تكون الدالة  $F$  على الصورة

$$F = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + g(y)$$

ونختار  $g(y)$  بحيث

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

فنرى بسهولة أن

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

وإن

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + g'(y)$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + g'(y)$$

$$= N(x, y) - N(x_0, y) + g'(y)$$

أي أن

$$g'(y) = N(x_0, y)$$

وبالتالي نحصل على

$$g(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

حيث  $(x_0, y_0)$  نقطة اختيارية في  $R$  . وهذا هو المطلوب .

من هذه النظرية نجد أنه إذا كانت المعادلة ( 1 ) معادلة تفاضلية تامة ، فإن حلها

العام هو

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = c \quad (8)$$

حيث  $c$  ثابت اختياري ،  $(x_0, y_0)$  أي نقطة داخل  $R$  .

وفيما يلي نستعرض بعض الأمثلة عن المعادلات التفاضلية التامة .

مثال ١٠ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2xy - 3x^2) dx + (x^2 + 2y) dy = 0$$

الحل : نلاحظ أن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أنه لدينا معادلة تامة حلها العام هو

$$\int_0^x (2xy - 3x^2) dx + \int_0^y 2y dy = c$$

أو

$$x^2y - x^3 + y^2 = c.$$

( لاحظ أننا اخترنا  $x_0 = y_0 = 0$  لأن كلا من الدالتين  $M, N$  معرفة عند  $(0,0)$  وبالطبع هذا أبسط اختيار ممكن ).

مثال ١١ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(e^{2y} - y \cos xy) dx + (2xe^{2y} - x \cos xy - 3y^2) dy = 0$$

الحل : نلاحظ بسهولة أن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos xy + xy \sin xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أنه لدينا معادلة تامة ، وعليه فإن الحل العام هو

$$\int_0^x (e^{2y} - y \cos xy) dx + \int_0^y (-3y^2) dy = c$$

أو

$$xe^{2y} - \sin xy - y^3 = c.$$

مثال ٣ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(xy^2 + y - x) dx + x(xy + 1) dy = 0$$

المحققة للشروط الابتدائية  $y(-1) = 1$  .

الحل : نلاحظ أن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أن لدينا معادلة تامة ، وبالتالي فحلها العام هو :

$$\int_0^x (xy^2 + y - x) dx + \int_0^y 0 dy = c$$

أو

$$\frac{x^2 y^2}{2} + yx - \frac{x^2}{2} = c \quad (9)$$

وباستخدام الشروط الابتدائية  $y(-1) = 1$  نعوض في المعادلة (9) لنصل إلى

$$\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -1 = c$$

وبالتعويض من  $c$  في المعادلة (9) وحرب كل حد فيها في العدد -2 نحصل على  
الحل الخاص

$$x^2 - 2yx - x^2 y^2 = 2$$

تمارين

فيما يلي اختبار تمام المعادلة وأوجد حلها في حالة تمامها . وفي حالة عدم تمامها حاول تجربة طريقة البند السابق :

(1)  $(2x + 4) dx + (3y - 1) dy = 0$

(2)  $(x + 2y) dx + (2x + y) dy = 0$

(3)  $(y^2 - 2xy + 6x) dx - (x^2 - 2xy + 2) dy = 0$

(4)  $(y^2 + 2y) dx - (2xy + x) dy = 0$

(5)  $(2xy - y) dx - (x^2 + x) dy = 0$

(6)  $(\sin y - y \sin x) dx + (\cos x + x \cos y - y) dy = 0$

- (7)  $(2x + y \cos xy)dx + x \cos xy dy = 0$   
 (8)  $(w^3 + w z^2 - z) dw + (z^3 + w^2 z - w) dz = 0$   
 (9)  $x \frac{dy}{dx} = 2x e^x - y + 6x^2$   
 (10)  $(y \ln y - e^{xy}) dx + (y^{-1} + x \ln y) dy = 0$   
 (11)  $(2xy - \tan y) dx + x(x - \sec^2 y) dy = 0$   
 (12)  $\frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy = 0$   
 (13)  $(1 - 3x^{-1} + y) dx + (1 - 3y^{-1} + x) dy = 0$   
 (14)  $e^t (y - 1) dt + (1 + e^t) dy = 0$   
 (15)  $(\cos x \cos y - \cot x) dx - \sin x \sin y dy = 0$   
 (16)  $(1 + y^2) dx + (x^2 y + y) dy = 0$   
 (17)  $(x + y)(y - x) dx - x(x - 2y) dy = 0$   
 (18)  $3y(x^2 - 1) dx + (x^3 + 8y - 3x) dy = 0; \quad y(0) = 1$   
 (19)  $(x + y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1) dy = 0; \quad y(1) = 1$   
 (20)  $(y e^{xy} - 2y^3) dx + (x e^{xy} - 6xy^2 - 2y) dy = 0; \quad y(0) = 2$   
 (21)  $(4y + 2x - 5) dx + (6y + 4x - 1) dy = 0; \quad y(-1) = 2$   
 (22)  $(y + e^x) dx + (2 + x + y e^y) dy = 0; \quad y(0) = 1$   
 (23)  $(xy^2 + x - 2y + 3) dx + x^2 y dy = 2(x + y) dy; \quad y(1) = 1$

## ٥-٢ المعادلات المتجانسة

**تعريف.** إذا كانت  $f$  دالة في متغيرين بحيث

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

حيث  $\lambda \neq 0$  أي عدد حقيقي ، عندها نقول أن  $f(x, y)$  دالة متجانسة من الدرجة  $n$  .

ولنفرض لهذا التعريف المجرّد مثلاً يقرب فكرة الدالة المتجانسة من الانهتان .

فكثيرات الحدود التي لكل حد فيها نفس الدرجة مثل

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 2y^2 \\ x^3 + y^3 + x^2 y \\ x^4 y^2 + 7xy^5 \end{aligned}$$

يطلق عليها مسمى كثيرات الحدود المتجانسة . ومن هذا المنطلق يمكننا أن نحدد تجانس المعادلة من عدمه من النظرة الأولى في حالات كثيرة دون الحاجة إلى تطبيق التعريف حرفيا حتى ولو لم تكن الدالة من كثيرات الحدود ، فمثلا الدالة

$$f(x,y) = 2y^3 e^{y/x} - \frac{x^4}{3x-2y} \quad (1)$$

متجانسة ، لأن الحد الأول فيها يشتمل على  $y^3$  مضروباً في المقدار  $e^{y/x}$  الذي يعد متجانساً من الدرجة صفر لأنه الدالة الأسية الطبيعية لكسر تساوت درجة بسطه مع درجة مقامه ، وكذلك الحد الثاني من الدرجة الثالثة لأنه حاصل قسمة مقدار من الدرجة الرابعة على مقدار من الدرجة الأولى .

وفيما يلي سنعطى مثالا نطبق فيه التعريف السابق .

مثال ١ . اثبت أن الدالة المعطاة في (1) متجانسة .

الحل :

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 2\lambda^3 y^3 e^{2y/\lambda x} - \frac{\lambda^4 x^4}{3\lambda x - 2\lambda y} \\ &= 2\lambda^3 y^3 e^{y/x} - \frac{\lambda^4 x^4}{\lambda(3x - 2y)} \\ &= \lambda^3 \left( 2y^3 e^{y/x} - \frac{x^4}{3x - 2y} \right) = \lambda^3 f(x,y). \end{aligned}$$

وعليه فإن  $f$  دالة متجانسة من الدرجة الثالثة .

وفيما يلي نظريتان ذات أهمية خاصة لما صياغيهما من نقاش .

نظرية ١. إذا كانت كلتا الدالتين  $M(x,y)$  و  $N(x,y)$  متجانستين ومن نفس الدرجة ، فإن الدالة  $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$  متجانسة من الدرجة صفر .

البرهان : طبقا لتعريف فإن

$$\frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^n M(x, y)}{\lambda^n N(x, y)} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

حيث  $n$  درجة كل من  $M$  و  $N$  .

نظرية ٢. إذا كانت  $f(x,y)$  دالة متجانسة من الدرجة صفر ، فهي دالة في  $y/x$  فقط .

البرهان : نضع  $y = vx$  أو  $v = y/x$  . في هذه الحالة يجب أن نثبت أن  $f$  هي دالة في المتغير  $v$  فقط . لاحظ الآن أن

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x, vx) = f(x.1, x.v) \\ &= x^0 f(1, v) = f(1, v) \end{aligned} \quad (2)$$

حيث  $x$  لعبت دور  $\lambda$  في تعريف ٢. ومن ثم فإن  $f$  دالة في  $v$  فقط .

تعريف . يقال للمعادلة التفاضلية  $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$  أنها متجانسة إذا كانت كل من  $M$  ,  $N$  متجانسة وبنفس الدرجة .

ولنعد مرة أخرى إلى المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ولنفترض الآن

أن المعادلة

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \quad (3)$$

تتميز بأن كلا من الدالتين  $M$  ,  $N$  متجانستين من نفس الدرجة في المتغيرين  $x$  و  $y$  . باستعمال النظريتين السابقتين نستنتج أن النسبة  $\frac{M}{N}$  دالة في  $\frac{y}{x}$  فقط .



وبقسمة المعادلة (3) على المقدار  $N(x,y)$  نحصل على

$$\frac{dy}{dx} + g\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad (4)$$

وهذا بدوره يعرض علينا إدخال متغير جديد  $v$  باستعمال التعويض  $y = vx$  ،  
ومن ثم نحصل على

$$dy = v dx + x dv$$

وبالتعويض في (4) نحصل على المعادلة

$$x \frac{dv}{dx} + v + g(v) = 0 \quad (5)$$

وهي من ذوات المتغيرات المنفصلة . وبتطبيق طريقة البند الثالث يمكننا الحصول  
على حل للمعادلة (5) في المتغيرين  $x$  و  $v$  ، ثم نقوم باستبدال  $\frac{y}{x}$  بالكسر  $v$   
للمحصل على حل للمعادلة الأصلية (3) .

ملاحظة . كان بإمكاننا الوصول إلى نتيجة مماثلة باستعمال التعويض  $x = uy$   
وعلى أية حال فإن على الطالب أن يحاول تطبيق التعويض الأسهل ، علما بأن أيما  
منهما سيؤدي إلى الحل دون شك ، ولكن من الأفضل سلوك الطريق الأسهل توفيراً  
للووقت وتقليلًا من عمليات التعويض والاختصارات الجبرية .

مثال ٢ . حل المعادلة

$$(x^2 + y^2) dx + (x^2 - xy) dy = 0$$

الحل : من الملاحظ أن كلا من الدالتين  $M(x,y)$  و  $N(x,y)$  متجانسة من الدرجة  
الثانية . فإذًا إختارنا التعويض  $y = vx$  فنحصل على

$$(x^2 + v^2 x^2) dx + (x^2 - x^2 v) (v dx + x dv) = 0$$

نقوم الآن بجمع حدود  $dx$  على حدة وكذلك حدود  $dv$

$$(x^2 + v^2 x^2 + x^2 v - x^2 v^2) dx + x^3 (1 - v) dv = 0$$

أو

$$x^2 (1 + v) dx + x^3 (1 - v) dv = 0$$

وبفصل المتغيرات نصل إلى

$$\frac{dx}{x} + \left( \frac{1-v}{1+v} \right) dv = 0$$

أو

$$\frac{dx}{x} + \left( -1 + \frac{2}{1+v} \right) dv = 0$$

وبالتكامل ينتج لدينا

$$\ln |x| - v + 2 \ln |1+v| + \ln |c| = 0$$

أو

$$\ln |x| - \frac{y}{x} + 2 \ln \left| 1 + \frac{y}{x} \right| + \ln |c| = 0$$

وباستعمال قوانين اللوغاريتمات نصل إلى الحل في صورته المناسبة وهي

$$c(x+y)^2 = x e^{y/x}$$

مثال ٣. حل المعادلة

$$y^2 dx + x(x+y) dy = 0 \quad (6)$$

الحل : مرة أخرى نلاحظ أن معاملي  $dx$  و  $dy$  متجانسان من الدرجة الثانية ، وبإمكاننا أن نعوض باستخدام  $y = vx$  ، ولكن نظراً لبساطة معامل  $dx$  النسبية ، فإن من الأفضل اللجوء إلى إستخدام التعويض  $x = uy$  ، ومنه  $dx = u dy + y du$  وبالتالي تصير المعادلة ( 6 ) إلى المعادلة

$$y^2 (u dy + y du) + uy (uy + y) dy = 0$$

أو

$$(u dy + y du) + u(u+1) dy = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نصل إلى

$$y du + (u^2 + 2u) dy = 0$$

أو

$$\frac{du}{u(u+2)} + \frac{dy}{y} = 0$$

ثم نكامل الطرفين لينتج لدينا ( مع ملاحظة أن تكامل الحد الأول يتم بطريقة الكسور الجزئية )

$$\left| \frac{du}{2u} - \left| \frac{du}{2(u+2)} + \left| \frac{dy}{y} = \ln c, \quad c > 0 \right. \right.$$

وبالمضرب في 2 ثم إجراء التكامل نحصل على

$$\ln u - \ln(u+2) + \ln y^2 = \ln c^2$$

أو

$$\frac{u y^2}{u+2} = c^2$$

وبالتعويض من المتغير  $u$  نحصل على الناتج النهائي

$$xy^2 = c^2(x+2y)$$

تعارين

فيما يلي أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad (x-2y) dx + (2x+y) dy = 0$$

$$(2) \quad xy dx - (x^2 + 3y^2) dy = 0$$

$$(3) \quad x dx + (y-2x) dy = 0$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

$$(5) \quad x^2 y' = 3x^2 - 2xy + y^2$$

$$(6) \quad (x^2 + y^2) dx - xy dy = 0$$

$$(7) \quad (5v-u) du + (3v-7u) dv = 0$$

$$(8) \quad y' = y x^{-1} + x y^{-1}$$

$$(9) \quad y' = \frac{y}{x} \ln \left( \frac{y}{x} \right)$$

$$(10) \quad 2x^2 y dx = (3x^3 + y^3) dy$$

$$(11) \quad (x-y)(4x+y) dx + x(5x-y) dy = 0$$

$$(12) (x + \sqrt{xy}) dy - y dx = 0$$

$$(13) xy dx - (x + 2y)^2 dy = 0$$

$$(14) (x - y \ln y + y \ln x) dx + x (\ln y - \ln x) dy = 0$$

$$(15) y^2 dy = x (x dy - y dx) e^{x/y}$$

$$(16) (x^4 + y^4) dx - 2x^3 y dy = 0$$

$$(17) y \frac{dx}{dy} = x + 4y e^{-2x/y}$$

فيما يلي أوجد حل المعادلة التفاضلية الخاصة للشرط الابتدائي المرفق :

$$(18) xy^2 y' = y^3 - x^3; \quad y(1) = 2$$

$$(19) (x - y) dx + (3x + y) dy = 0; \quad y(2) = -1$$

$$(20) 2x^2 y' = 3xy + y^2; \quad y(1) = -2$$

$$(21) y^2 dx + (x^2 + 3xy + 4y^2) dy = 0; \quad y(2) = 1$$

$$(22) (x + y e^{y/x}) - x e^{y/x} y' = 0; \quad y(1) = 0$$

$$(23) y dx + x (\ln x - \ln y - 1) dy = 0; \quad y(1) = e$$

$$(24) y (9x - 2y) dx - x (6x - y) dy = 0; \quad y(1) = 1$$

$$(25) (16x + 5y) dx + (3x + y) dy = 0; \quad y(1) = -3$$

## ٦-٢ المعادلات الخطية

لعل القارئ يدرك الآن أن المعادلات التفاضلية التامة هي غاية في حد ذاتها لمسهولة حلها . فإذا ما كانت المعادلة التفاضلية غير تامة ، فلعل من الطبيعي جدا أن نسمى إلى وضع المعادلة في صيغة جديدة لكنها تامة ، وفي ذات الوقت يمكن إيجاد حل لها يتميز بأنه حل للمعادلة الأصلية التي تحت الاعتبار .

ويتم الوصول إلى الصيغة التامة للمعادلة من طريق ضرب كل حد فيها بما يُسمى بعامل المكاملة ، وهو ذلك المقدار الذي ينتج عن ضربه في كل حد من حدود المعادلة أن تصبح المعادلة تامة .

ولا يمكن تطبيق هذه الطريقة على جميع المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى بصيغة عامة ، إلا أن هناك صنفًا هامًا خاصًا من هذه المعادلات يمكن دائمًا إيجاد عامل مكاملة لها ، وهو صنف المعادلات الخطية من الرتبة الأولى .

تعريف. يقصد بالمعادلة الخطية من الرتبة الأولى ( في المتغير التابع ) كل معادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

فكرة الطريقة . قلنا إننا في هذه الطريقة نسمى إلى إيجاد عامل متكاملة يحول المعادلة الخطية إلى معادلة تامة . فلنفترض أن عاملا كهذا قد وُجد ، ولنرمز اليه بالرمز  $v(x)$  ، وأن جميع قيمه موجبة . عندها نستنتج أن المعادلة

$$v(x) \left[ \frac{dy}{dx} + P(x)y \right] = v(x) Q(x) \quad (2)$$

يجب أن تكون تامة . وبإعادة كتابة ( 2 ) نحصل على المعادلة

$$\left[ v(x) P(x) y - v(x) Q(x) \right] dx + v(x) dy = 0 \quad (3)$$

وبمقارنته ( 3 ) بالشكل العام الذي تحدثنا عنه في البند الثالث وهو

$$M dx + N dy = 0$$

نجد أن

$$M = v P y - v Q$$

$$N = v$$

مع ملاحظة أن  $Q, P, v$  نوال في  $x$  فقط .

وبناءً عليه فإن كانت المعادلة ( 3 ) تامة ، فلا بد أن يكون لدينا

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبالتعويض من المعادلتين أعلاه نحصل على

$$v P = \frac{dv}{dx}$$

أو

$$P dx = \frac{dv}{v}$$

ويمكاملة الطرفين نحصل على

$$\ln v = \int P dx \quad (4)$$

أو

$$v = e^{\int P dx} \quad (5)$$

أي أنه إذا كان للمعادلة (1) عامل مكاملة موجب مستقل عن  $y$  فلا بد أن يكون معطى بالمعادلة (5).

ولنتأكد الآن أن  $v$  المعطاة بالمعادلة (5) تمثل فعلا عامل مكاملة للمعادلة (1). ولنبدأ بضرب كل حد في (1) في قيمة  $v$  لنحصل على المعادلة

$$e^{\int P dx} \frac{dy}{dx} + P e^{\int P dx} y = Q e^{\int P dx} \quad (6)$$

لاحظ هنا أن الطرف الأيسر من المعادلة (6) ماهو الا مشتقة المقدار

$$y e^{\int P dx}$$

بالنسبة إلى  $x$  بينما الطرف الأيمن دالة في المتغير  $x$  فقط . وعليه فإن المعادلة (6) تامة كما هو متوقع . ولوضع العبارة الأخيرة في صيغة رياضية فإننا نكتب

$$\frac{d}{dx} \left[ y e^{\int P dx} \right] = Q e^{\int P dx}$$

وبمكاملة الطرفين نصل إلى الحل المطلوب  $y$  .

ولنلخص الآن طريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية .

طريقة حل المعادلات الخطية

(أ) اكتب المعادلة في صيغتها القياسية

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

(ب) أوجد قيمة عامل المكاملة  $v(x)$  للمعادلة عن طريق القانون

$$v(x) = e^{\int P(x) dx}$$

(ج) اضرب كل حد من حدود المعادلة ذات الصيغة القياسية في  $v(x)$  مع ملاحظة أن

الطرف الأيسر عبارة عن المقدار  $\frac{d}{dx} [v(x) y]$  لتحصل على

$$v(x) \frac{dy}{dx} + P(x) v(x) y = v(x) Q(x)$$

أو

$$\frac{d}{dx} [v(x) y] = v(x) Q(x)$$

(د) كامل طرفي المعادلة الأخيرة لتحصل على  $y$  بالقسمة على  $v(x)$ .

مثال ١. حل المعادلة

$$(x^4 + 2y) dx - x dy = 0$$

الحل : (أ) نضع المعادلة في صيغتها القياسية بالقسمة على المقدار  $-x dx$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = x^3$$

(ب) نجد عامل المكاملة  $v$

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{\int -(2/x) dx} = e^{-2 \ln |x|} \\ &= e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

(ج) نصل الآن إلى المعادلة

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x^2} y \right] = \frac{1}{x^2} x^3 = x$$

(د) نكامل الطرفين لتحصل على

$$\frac{y}{x^2} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1$$

أو

$$y = \frac{1}{2} x^2 (x^2 + c)$$

#### مثال ٢. حل المعادلة التفاضلية

$$y \, dx + (3x - xy + 2) \, dy = 0$$

الحل : حيث أنه يوجد لدينا حاصل الضرب  $y \, dy$  فالمعادلة ليحت خطية في  $y$  لكننا خطية في  $x$  . وعليه فإننا نعيد ترتيب الحدود لتصبح المعادلة على النحو

$$y \, dx + (3 - y) x \, dy = -2 \, dy$$

ومن هنا نصل إلى الصيغة القياسية في  $x$

$$dx + \left( \frac{3}{y} - 1 \right) x \, dy = -2 \frac{dy}{y} \quad (7)$$

أو

$$\frac{dx}{dy} + \left( \frac{3}{y} - 1 \right) x = -\frac{2}{y}; \quad y \neq 0$$

ومن ثم نجد أن

$$v(y) = e^{\int p(y) \, dy}$$

$$= e^{\int (3y - 1) \, dy}$$

$$= e^{3/2 y^2 - y} = y^3 e^{-y}$$

ويضرب المعادلة (7) في عامل المكاملة  $y^3 e^{-y}$  نحصل على المعادلة التامة

$$y^3 e^{-y} \, dx + y^2 (3 - y) e^{-y} x \, dy = -2 y^2 e^{-y} \, dy$$

ومنه نحصل على

$$x y^3 e^{-y} = -2 \int e^{-y} y^2 \, dy$$

$$= 2 y^2 e^{-y} + 4 y e^{-y} + 4 e^{-y} + c$$

ويمكن كتابة مجموعة الحل ضمنيا على النحو التالي

$$x y^3 = 2 y^2 + 4 y + 4 + c e^y$$



مثال ٣. حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x; \quad y(0) = -3$$

الحل : نجد أولاً عامل المكاملة

$$v(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

ومنه نصل إلى

$$\frac{d}{dx} [e^{x^2} y] = x e^{x^2}$$

أو

$$e^{x^2} y = \int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

وبالتالي نستنتج أن

$$y = \frac{1}{2} + c e^{-x^2}$$

بتعويض القيمة الابتدائية نجد أن

$$-3 = \frac{1}{2} + c e^0$$

ومنه  $c = -\frac{7}{2}$  . ومن ثم نحصل على الحل الوحيد

$$y = \frac{1}{2} (1 - 7e^{-x^2})$$

تمارين

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1)  $(3xy + 3y - 4) dx + (x + 1)^2 dy = 0$

(2)  $2y' + 10y = 1$

(3)  $y' - y = e^{3x}$

(4)  $y'' + 3x^2 y = x^2$

$$(5) \quad y' = \csc x - y \cot x$$

$$(6) \quad (x + 4y^2) dy + 2y dx = 0$$

$$(7) \quad x dy = (x \sin x - y) dx$$

$$(8) \quad (1 + e^x) y' + e^x y = 0$$

$$(9) \quad (3x - 1) y' = 6y - 10 (3x - 1)^{1/3}$$

$$(10) \quad (y - \cos^2 x) dx + \cos x dy = 0$$

$$(11) \quad (x + xy) dx - (1 + x^2) dy = 0$$

$$(12) \quad xy' + (3x + 1)y = e^{-3x}$$

$$(13) \quad v dx + (2x + 1 - vx) dv = 0$$

$$(14) \quad y' = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} - y$$

$$(15) \quad y' - 1 = 3y \tan x$$

$$(16) \quad (1 + \cos x) y' = \sin x (\sin x + \sin x \cos x - y)$$

$$(17) \quad (x + 2)^2 y' = 5 - 8y - 4xy$$

$$(18) \quad y dx + (xy + 2x - y e^y) dy = 0$$

فيما يلي أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$(19) \quad (2x + 3) y' = y + (2x + 3)^{1/2}; \quad y(-1) = 0$$

$$(20) \quad y' = x^3 - 2xy; \quad y(1) = 1$$

$$(21) \quad 2(1+x) + 3t \frac{dx}{dt} = 0; \quad x(1) = 1$$

$$(22) \quad x(x - 2) y' + 2y = 0; \quad y(3) = 6$$

$$(23) \quad y' = \frac{y}{(y - x)}; \quad y(5) = 2$$

$$(24) \quad y' = 2(2x - y); \quad y(0) = 1$$

$$(25) \quad (x + 1) y' = \ln x - y; \quad y(1) = 10$$

$$(26) \quad y' + y \tan x = \cos^2 x; \quad y(0) = -1$$

$$(27) \quad y' = 2(2x - y); \quad y(0) = -1$$

$$(28) \quad y' = 2y + x (e^{3x} - e^{2x}); \quad y(0) = 2$$

## ٧-٢ ملخص الباب

لقد استعرضنا في بداية الباب نظرية وجود الحل ووحدايته للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى التفاضلة للشرط الابتدائي  $y(x_0) = y_0$  . ثم تعرضنا بشيء من التفصيل لبعض أنواع المعادلات التفاضلية وطرق حلولها وهي:

(١) المعادلة ذات المتغيرات المنفصلة ، وهي التي يمكن أن توضع في الصورة

$$A(x) dx + B(y) dy = 0$$

(٢) المعادلة التامة ، وهي المعادلة

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

المتميزة بتحقيق الشرط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(٣) المعادلة المتجانسة ، وهي المعادلة التي على الصورة

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

والمتميزة بأن كلا من  $M$  ,  $N$  متجانسة ، وينفس درجة التجانس .

(٤) المعادلة الخطية ، وهي المعادلة التي يمكن وضعها في الصيغة القياسية

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

أو

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

هذا وقد تم شرح طريقة إيجاد حل كل نوع من هذه المعادلات شرحا رياضيا وأفيا مع دعم ذلك بالأمثلة الكافية لايضاح كيفية تطبيق الطريقة .

ومن المتوقع أن يكون لدى الطالب الآن حصيلة كافية من التمارين على كل نوع من هذه المعادلات ، كما أنه من المتوقع أن يكون قد حقق لنفسه الحس الرياضي المناسب الذي يؤهله لتجديد نوع المعادلة من النظرة الأولى ، والشروع في حلها بالتالي . ومن المهم جدا للطالب أن يبني هذه الملكة أو الحس الرياضي خاصة في مادة كهذه حيث ستكون الحصيلة كبيرة في نهاية الفصل الدراسي .

## ٨-٢ تمارين عامة

فيما يلي أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad y' = \frac{e^{xy}}{y-1}$$

$$(2) \quad y' = (y-x)^{-1}$$

$$(3) \quad y' = \frac{y^2 + y}{x^2 + x}$$

$$(4) \quad (2xy - 3x^2) dx + (x^2 - 2y^{-3}) dy = 0$$

$$(5) \quad (x+y) dx + x dy = 0$$

$$(6) \quad xyy' = 3y^2 + x^2; \quad y(-1) = 2$$

$$(7) \quad x^3 y^2 dx + x^4 y^{-6} dy = 0$$

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{x+t}$$

$$(9) \quad y e^{xy} \frac{dx}{dy} + x e^{xy} = 12 y^2; \quad y(0) = -1$$

$$(10) \quad (x^3 + y^3) dx + y^2(3x - y) dy = 0$$

$$(11) \quad \frac{y}{x} y' = \frac{e^x}{\ln y}; \quad y(1) = 1$$

$$(12) \quad (x-y) dx - (x+y) dy = 0$$

$$(13) \quad y' - y x^{-1} = x^2 \sin 2x$$

$$(14) \quad y(x^2 + y^2) dx + x(3x^3 - 5y^2) dy = 0$$

$$(15) \quad dx = \cos x \cos^2 t \, dt$$

$$(16) \quad y' = x^3 - 2xy; \quad y(1) = 2$$

$$(17) \quad (2x^2 - 2xy - y^2) dx + xy \, dy = 0$$

$$(18) \quad 2xyy' + y^2 = 2x^2$$

$$(19) \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}; \quad y(1) = -4$$

$$(20) \quad (1 + 4xy - 4x^2y) dx + (x^2 - x^3) dy = 0; \quad y(2) = 0$$

$$(21) \quad (x - \sin^2 t) dt + \sin t dx = 0$$

$$(22) \quad (x - y) dx + (3x + y) dy = 0; \quad y(2) = -1$$

$$(23) \quad xy (dx - dy) = x^2 dy + y^2 dx$$

$$(24) \quad x dt = (3t + x^3 - x^2) dx; \quad x(1) = -1$$

$$(25) \quad y' = \sec x - y \tan x$$

$$(26) \quad (1 - u^2) v' = 1 - uv - 3u^2 + 2u^4$$

$$(27) \quad 2tx + (t^2 - x) x' = 0; \quad x(-1) = 1$$

$$(28) \quad x \cos y + x^{-1} + \left( \sin y - \frac{y}{x^2} + x^{-1} \right) \frac{dx}{dy} = 0$$

$$(29) \quad u^2 v' = v - (1 - u); \quad u(-1) = 1$$

$$(30) \quad y' = y \tan x + \cos x; \quad y(0) = 1$$

$$(31) \quad y dx = (e^y + 2xy - 2x) dy$$

$$(32) \quad (u^2 - 2uv + v^2) du - (u^2 - 2uv - v^2) dv = 0$$

$$(33) \quad y' = \cos x - y \sec x; \quad y(0) = 1$$

$$(34) \quad v (3x + 2v) dx - x^2 dv = 0; \quad v(1) = 2$$

$$(35) \quad (2xy \cos x^2 - 2xy + 1) dx + (\sin x^2 - x^2) dy = 0$$

$$(36) \quad (xy^2 + y - x) dx + x (xy + 1) dy = 0$$

(٣٧) أوجد حل المعادلة التفاضلية  $y' = 3x + y$  والذي يمر بالنقطة  $(-1, 0)$  .

(٣٨) أوجد حل المعادلة التفاضلية  $y' = 3x + y$  والذي يمر بالنقطة  $(-1, 1)$  .

(٣٩) أوجد حل المعادلة التفاضلية  $y' = 2(2x - y)$  والذي يمر بالنقطة  $(0, 2)$  .

(٤٠) أوجد حل المعادلة التفاضلية  $\sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$  والذي يمر

بالنقطة  $(0, \sqrt{3}/2)$  .



الكتاب الثاني

## تطبيقات على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

■ مقدمة ■ تطبيقات رياضية ■ تطبيقات فيزيائية ■ تطبيقات كيميائية ■ تطبيقات  
بيولوجية ■ تطبيقات إحصائية ■ ملخص الباب ■ قانون عامة .





### ١-٣ مقدمة

تلعب المعادلات التفاضلية دورا هاما ورئيسيا في ترجمة الواقع الفعلي لكثير من المشكلات الطبيعية إلى نماذج رياضية محددة المعالم يمكن دراستها من وجهة رياضية بحثية ومن ثم العمل على إيجاد الحلول المناسبة التي تُترجم مرة أخرى إلى عالم الواقع فتعطي صورة واضحة عن ماهية الحلول الممكنة والخيارات المتاحة .

إذا - وكما يتضح من السياق - فالنموذج الرياضي ماهو إلا محاولة دقيقة مدروسة لمحاكاة الواقع الفعلي ووصفه بدقة باستعمال لغة الرياضيات . وهذا هو ما يسعى اليه العلماء والمهندسون وغيرهم ممن تُسند اليهم مهام إيجاد الحلول العملية للمشكلات الواقعية والمعضلات التقنية التي تواجه المجتمع البشري بعد بلوغه هذه الدرجة من التقدم التكنولوجي والعلمي الهائل .

ولعل عملية بناء أو تكوين النموذج الرياضي الفعال تحتاج إلى مهارة وخيال وتقدير موضوعي للمشكلة تحت البحث . وبالتأكيد فإن الاحاطة ببعض النماذج القائمة التي توضح الجوانب المختلفة لإنشاء النموذج الرياضي ستؤدي حتما إلى وضوح الصورة إضافة إلى تزويد القارئ ببعض الخبرة والمران والألفة . وهذا ما سنتفعله في هذا الباب وفي الباب العادي عشر أيضا حين نتناول بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية .

أما في هذا الباب فسنتناول - كما هو متوقع - بعض التطبيقات البسيطة للمعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى . وقد يكون من المناسب إرجاء هذا الباب إلى ما بعد الباب التالي ، لكننا أثرنا أن يكون هذا الترتيب حتى لا يطول المقام بالطالب قبل أن يرى بعض التطبيقات العملية للمادة التي بين يديه . ولعل أهم الخطوات التي يجب على صاحب المشكلة إتخاذها ما يلي :

أولاً : صياغة المشكلة بحيث يمكن إيجاد حل رياضي لها . وهذا يتطلب فهماً جيداً لمجال المشكلة كما يتطلب إلماماً بالنظرية الرياضية . وقد يكون من المناسب هنا التحدث مع أصحاب الشأن من غير الرياضيين وقراءة ما كتب في هذا الشأن .

ثانياً : تطوير النموذج الرياضي ، وهذا يتم على مرحلتين . الأولى تحديد أي من المتغيرات مهم وأياها غير مهم أو هامشي ، والثانية تحديد العلاقات التي تربط بين هذه المتغيرات سواء كانت مستقلة أو تابعة .

ثالثاً : اختبار النموذج الذي بين يديك ويتم هذا بمقارنة النموذج ببعض القراءات العملية أو الفعلية والتي قد تؤيد أو تدحض صلاحية النموذج الذي توصلت إليه . ولعل من المناسب هنا أن تسأل نفسك الأسئلة التالية :

- هل إفتراضاتك معقولة ؟
  - هل الأبعاد الفعلية للمتغيرات المفترضة صحيحة ؟
  - ألا يوجد تناقض بين المعادلات التي تمثل النموذج ؟ أي هل المعادلات الرياضية متسجمة مع بعضها البعض ؟
  - هل توجد حلول للمعادلات الموضوعة ؟ وما مدى صعوبة إيجاد هذه الحلول إن كان الجواب بالإيجاب ؟
  - هل توفر هذه الطول أجوبة شافية للمعضلة التي بين يديك ؟
- وإلى هنا يجدر بنا الانتقال إلى البند التالي في أول جولة لنا مع التطبيقات العملية ، وقد حاولنا تصنيف هذه التطبيقات حتى يسهل على القارئ اختيار ما يشاء مما يلائم رغبته وتخصصه واهتماماته .

### ٣-٢ تطبيقات رياضية ( المسارات المتعامدة )

لنفترض أن لدينا عائلة من المنحنيات التي تمثلها المعادلة  $y = F(x, c)$  حيث  $c$  بسيط أو ثابت لهذه العائلة . ولنفترض أن هناك عائلة أخرى من المنحنيات  $y = G(x, c)$  المتعامدة مع العائلة  $y = F(x, c)$  . بمعنى أن كل عضو من العائلة الثانية يتعامد مع كل عضو من العائلة الأولى . ومثال ذلك عائلة الدوائر

$$x^2 + y^2 = c$$

والتي تشترك في مركز موجد هو نقطة الأصل ، هذه العائلة تتعامد مع عائلة الخطوط المستقيمة التي تمر بنقطة الأصل . وفي هذه الحالة نقول بأن العائلتين تشكلان مسارات متعامدة مع بعضها البعض . ويطلق على العائلة  $y = G(x, c)$  مسمى المسارات المتعامدة للعائلة  $y = F(x, c)$  .

ولإيجاد معادلة المسارات المتعامدة للعائلة  $y = F(x, c)$  نقوم أولاً بإيجاد المعادلة التفاضلية للعائلة  $y = F(x, c)$  ومن ثم نجد الميل  $m = m(x, y)$  عند أي نقطة  $P(x, y)$  بمعلومية  $x$  و  $y$  . وعادة ما نلجأ إلى طريقة التخلص من الثابت الاختياري  $c$  باستعمال طريقة الباب الأول ( انظر البند ٢-١ ) . وبذلك يتم التخلص من الوسيط أو الثابت  $c$  من صيغة المقدار  $m(x, y)$  .

وبما أن ميل المسار المتعامد عند أي نقطة يساوي سالب مقلوب الميل ، فإن من الواضح أن المعادلة التفاضلية التي تمثل منحنى المسارات المتعامدة ما هي إلا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{m(x, y)} \quad (1)$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية ( 1 ) يمثل المعادلة المطلوبة  $y = G(x, c)$  .

مثال ١٠١ . أوجد عائلة المنحنيات المتعامدة مع العائلة  $y = ax^{-2}$  .

الحل : باستعمال طريقة التخلص من الثابت كما جاءت في البند ٢-١ نجد أننا

$$\text{نحصل على } dy = -2ax^{-3} dx , \text{ أو}$$

$$\frac{dy}{dx} = m(x, y) = -2ax^{-3}$$

وبالتعويض من  $a$  من معادلة العائلة نجد أن

$$m(x, y) = -2y x^{-1}$$

وبالتالي فالمعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة هي

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{m(x, y)} = \frac{1}{2y x^{-1}} = \frac{x}{2y}$$

أو هي

$$2y \, dy = x \, dx \quad (2)$$

وبحل المعادلة نستنتج أن العائلة المتعامدة المطلوبة تمثلها المعادلة

$$2y^2 + x^2 = c$$

مثال ٢ . أوجد معادلة المسارات المتعامدة للعائلة  $y = c e^{-2x} + 3x$  .

الحل : كما تقدم في المثال السابق نفاضل للتخلص من الوسيط أو الثابت  $c$

$$dy = (-2c e^{-2x} + 3) \, dx$$

$$= [-2(y - 3x) + 3] \, dx = (6x - 2y + 3) \, dx$$

ومن ثم نجد أن الميل  $m = 6x - 2y + 3$  . ولذا فإن المعادلة التفاضلية للمسارات

المتعامدة تكون على النحو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(6x - 2y + 3)}$$

أو

$$dx + (6x - 2y + 3) \, dy = 0 \quad (3)$$

وبضرب المعادلة (3) في المقدار  $e^{-6y}$  تتحول إلى معادلة تامة (انظر البند ٢-٤)

يكون حلها العام على الصورة

$$9x - 3y + 5 = c e^{-6y}$$

مثال ٣ . اثبت أن العائلة  $y = c_1 - \frac{x^4}{4}$  متعامدة مع العائلة  $y^2 = c_2 x^4$  .

الحل : باستعمال طريقة التخلص من الثابت كما جاءت في البند ١-٣ نجد أنه بالنسبة للعائلة الأولى

$$dy = 4c_1 x^3 \, dx = 4 \left( \frac{y}{x^4} \right) x^3 \, dx = \frac{4y}{x} \, dx$$

ومن ثم فإن ميل المسار يساوي  $m_1 = \frac{4y}{x}$  . أما بالنسبة للعائلة الثانية ، فإن

$$2y \, dy = - \left( \frac{x}{2} \right) dx$$

وبالتالي فإن الميل

$$m_2 = - \frac{x}{4y}$$

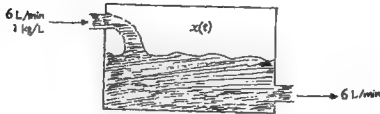
أي أن

$$m_1 m_2 = -1$$

وهذا يعني تعامد العائلتين كما هو مطلوب .

### ٣-٣ تطبيقات فيزيائية

مثال ١ . لنفترض أن لدينا خزاناً يحتوي على ١٠٠٠ لتر من الماء . ولنفترض أن محلولاً مشبعاً بالملح بدأ يتدفق إلى الخزان بمعدل ثابت يساوي ٦ لتر في الدقيقة ويتم خلطه باستمرار وانتظام داخل الخزان . أما معدل تدفقه من خارج الخزان فيساوي ٦ لتر في الدقيقة أيضاً . لو علمنا أن تركيز الملح في المحلول الداخل إلى الخزان هو ١ كجم في اللتر . بعد كم من الوقت سيصل تركيز الملح في الخزان إلى نصف كيلوجرام في اللتر ( انظر الشكل ١-٣ ) ؟



الشكل ١-٣

الخط يتدفق متساو

الحل : سنطبق هنا ما يُسمى بنظام الوعاء الواحد والذي يتكون أساساً من معرفة :

١- دالة  $x(t)$  تمثل كمية المادة في الوعاء في اللحظة  $t$  .

٢- معدل دخول المادة إلى الوعاء .

٣- معدل خروج المادة من الوعاء .

وحيث أن تفاضل  $x$  بالنسبة للمتغير  $t$  يمكن تفسيره على أنه معدل التغير في كمية المادة بالنسبة للوقت ، فإن المعادلة التفاضلية المقترحة لنظام الوعاء الواحد هي

$$(1) \quad \text{معدل التغير في } x = \frac{dx}{dt} = \text{معدل الدخول} - \text{معدل الخروج}$$

وهذا هو النموذج الرياضي لهذه العملية .

ولإيجاد حل للمشكلة التي بين أيدينا نطبق المعادلة ( 1 ) لتطابق الوضع القائم مع نظام الوعاء الواحد . فلنرمزنا بـ  $x(t)$  لكمية الملح الموجودة في الخزان في اللحظة  $t$  ، لأمكثنا تحديد تركيز الملح في الخزان عن طريق قسمة  $x(t)$  على حجم السائل في الخزان في اللحظة  $t$  . ولكن يجب علينا أن نحدد أيضاً معدل دخول الملح في الخزان . وحيث أن معدل دخول المحلول إلى الخزان هو ٦ لتر في الدقيقة وبما أن تركيز الملح في هذا المحلول هو ١ كجم في المتر ، فإننا نستنتج أن معدل دخول الملح هو

$$(2) \quad (6 \text{ لتر/دقيقة}) \times (1 \text{ كجم/لتر}) = 6 \text{ كجم/دقيقة}$$

ويتبقى علينا إيجاد معدل خروج الملح من الخزان . وحيث أنه يتم خلط المحلول في الخزان باستمرار وانتظام ، فإنه بإمكاننا افتراض أن تركيز الملح في الخزان منتظم، أي أن تركيز الملح في أي جزء من الخزان في اللحظة  $t$  يساوي  $x(t)$  مقسوماً على حجم السائل في الخزان . وحيث أن الخزان كان يحتوي أصلاً على ١٠٠٠ لتر ، وبما أن معدل التدفق إلى داخل الخزان يساوي معدل التدفق من خارج الخزان، فإن الحجم سيظل ثابتاً عند ١٠٠٠ لتر . وبالتالي فمعدل خروج الملح

$$(3) \quad (6 \text{ لتر/دقيقة}) (x(t) + 1000 \text{ كجم/لتر}) = 3x + 6000 \text{ كجم/دقيقة}$$

وبما أن الخزان كان يحتوي فقط على الماء في البداية ، فإن  $x(0) = 0$  . وبالتعويض عن المعدلات من المعادلتين ( 2 ) ، ( 3 ) في المعادلة ( 1 ) نحصل على المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{500}; \quad x(0) = 0. \quad (4)$$

وهي معادلة خطية ذات متغيرات منفصلة . وبإكمال الحل واستيفاء الشروط الابتدائية نحصل على المعادلة

$$x(t) = 1000 (1 - e^{-3t/500}) \quad (5)$$

ولذا فتركيز الملح في الخزان عند اللحظة  $t$  يساوي

$$0.001 x(t) = (1 - e^{-3t/500}) \text{ Kg/L} \quad (6)$$

ولإيجاد الوقت المستغرق لبلوغ تركيز الملح ٥ . . ٥ كجم/لتر، يجب أن نساوي الطرف الايمن من (6) بنصف ، ومن ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة  $t$  :

$$1 - e^{-3t/500} = \frac{1}{2}$$

أو

$$e^{-3t/500} = \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\frac{-3t}{500} = \ln \left( \frac{1}{2} \right) = -\ln 2$$

أو

$$t = \frac{500 \ln 2}{3} \approx 115.5 \text{ min.}$$

أي أن تركيز الملح في الخزان سيصبح نصف كجم/لتر بعد ١١٥ دقيقة ونصف تقريباً.

مثال ٢ ( قانون نيوتن للتبريد ) . لقد اثبتت التجربة أنه تحت ظروف معينة فإنه يمكن إيجاد تقريب جيد لحرارة جسم ما باستعمال قانون نيوتن للتبريد الذي ينص على : أن حرارة الجسم تتغير بمعدل يتناسب مع الفرق بين حرارة الجسم نفسه وحرارة الجو الخارجى المحيط بالجسم .

لنفترض أن لدينا مقياس حرارة كانت قراءته ٢١ درجة مئوية داخل البيت ، ثم أخرجنا المقياس إلى خارج البيت حيث درجة حرارة الجو تساوي ٥ درجات تحت

الصفر . وبعد مرور ثلاث دقائق وُجد أن قراءة المقياس انخفضت إلى ٧ درجات مئوية . المطلوب إيجاد معادلة تمكننا من التنبؤ بقراءة المقياس في أي لحظة لاحقة .

الحل : لتكن الدالة  $T$  ممثلة لدرجة حرارة المقياس عند اللحظة  $t$  باعتبار أن  $t$  هو الزمن المستغرق بعد إخراج المقياس إلى الخارج مباشرة . وبذلك يكون من معطيات المسألة أنه عندما تكون  $t = 0$  ، فإن  $T = 31^\circ$  ، وعندما  $t = 3$  تكون  $T = 7^\circ$  .

وطبقا لقانون نيوتن للتبريد فإن معدل التغير في  $T$  وهو  $\frac{dT}{dt}$  يتناسب مع الفرق  $(-5) - T$  . وبما أن درجة حرارة المقياس في طريقها للانخفاض فيبدر من المناسب أن نختار  $-k$  كعامل التناسب . أي أننا نسعى إلى إيجاد قيمة  $T$  على ضوء المعادلة التفاضلية

$$\frac{dT}{dt} = -k(T + 5); \quad T(0) = 31, \quad T(3) = 7 \quad (7)$$

وكان لا بد من توفر القراءة في وقتين مختلفين لاجتنابا إلى إيجاد قيمتي ثابتين مختلفين أحدهما معامل التناسب والآخر الثابت الناتج عن تكامل المعادلة (7) . ومن المعادلة (7) نحصل مباشرة على القانون

$$T = c e^{-kt} - 5$$

وباستعمال الشرط الابتدائي  $T(0) = 31$  نحصل على  $31 = c - 5$  أو  $c = 36$  أو

$$T = 36e^{-kt} - 5$$

ولإيجاد  $k$  نستعمل الشرط الابتدائي  $T(3) = 7$  لنحصل على

$$7 = 36e^{-3k} - 5$$

ومنه

$$12 = 36e^{-3k}$$

أو  $e^{-3k} = \frac{1}{3}$  ، وبالتالي  $k = \frac{1}{3} \ln 3$  . وبذلك تُعطى الحرارة  $T$  في أي وقت لاحق

طبقا للمعادلة

$$T = 36 e^{-(t/3)\ln 3} - 5 \quad (8)$$

وهذا هو المطلوب .



## ٤-٣ تطبيقات كيميائية

مثال ١ . من المعلوم أنه في بعض الحالات عندما يتم تحويل عنصر ما ، وليكن أ إلى عنصر آخر ب ، فإن المعدل الزمني اللازم لتحويل كمية قدرها  $x$  من العنصر أ يتناسب طردياً مع الكمية  $x$  نفسها التي لم يتم تحويلها بعد .

وليكن معلوما لدينا كمية المادة غير المحولة في لحظة معينة ، أي لتكن  $x = x_0$  عند اللحظة  $t = 0$  ، بمعنى أن كامل كمية العنصر أ هو  $x_0$  . عندها يتم تحديد قيمة  $x$  ( كمية المادة المتبقية التي لم تتحول بعد ) عند أي لحظة لاحقة  $t > 0$  بواسطة المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

إضافة إلى الشرط الابتدائي  $x(0) = x_0$  . وحيث أن الكمية  $x$  تتناقص بمرور الوقت ، فإن ثابت التناسب في المعادلة ( ١ ) يجب أن يكون سالبا  $(-k)$  . وبكاملة الطرفين في المعادلة ( ١ ) ينتج لدينا

$$x = c e^{-kt}$$

وإن  $x(0) = x_0$  ، فإن  $c = x_0$  . وبالتالي نحصل على

$$x = x_0 e^{-kt} \quad (2)$$

وهنا نحتاج إلى شرط آخر حتى يمكن إيجاد قيمة  $k$  ، لذا لنفترض أنه بعد مرور ٤٥ ثانية يكون قد تحول نصف كمية العنصر أ ، أي أن

$$x(45) = \frac{x_0}{2}$$

وبالتعويض في المعادلة ( 2 ) نجد أن

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-45k}$$

أو

$$k = \frac{\ln 2}{45}$$

ولذلك عند حساب  $t$  بالثواني ، فإن كمية المادة المتبقية عند اللحظة  $t$  تُعطى

## بالمعادلة

$$x = x_0 e^{-(4/45)\ln 2}$$

ولو أردنا حساب الكمية المتبقية بعد مرور دقيقة ونصف لوجدنا أنها تساوي

$$x = x_0 e^{-(90/45)\ln 2} = \frac{x_0}{4}$$

مثال ٢. في أغلب التفاعلات الكيميائية ، يتفاعل منصران ١ ، ب لتكوين عنصر آخر ج ، وقد وُجد أن معدل تكون ج يختلف باختلاف الكميات المتوفرة في ١ ، ب في لحظة تفاعلهما ، ولنفترض في مثالنا هذا أن التفاعل المثالي يحتاج ٢ كجم من ١ مقابل كل واحد كجم من ب . السؤال هو : لو كان عندنا ١٠ كجم من ١ و ٢٠ كجم من ب في البداية ، أي عند اللحظة  $t = 0$  . ولو تكون لدينا فقط ٦ كجم من ج بعد مرور ٢٠ دقيقة . أوجد كمية ج في أي لحظة  $t$  .

الحل : لكن  $x$  هي كمية ج المتكونه بعد مرور  $t$  من الساعات . وعندها يكون  $\frac{dx}{dt}$  هو معدل التكون . ولكي نحصل على  $x$  كجم من ج ، فإننا نحتاج  $(2x/3)$  كجم من ١ و  $(x/3)$  كجم من ب كما هو مُعطى في المثال . وبذلك تكون كمية ١ المتوافرة في اللحظة  $t$  الموافقة للحظة تكون  $x$  كجم من ج هي بالضبط  $[10 - (2x/3)]$  بينما تساوي كمية ب في ذات الوقت المقدار  $20 - (x/3)$  . وبذلك تنشأ لدينا المعادلة

$$\frac{dx}{dt} = k^* \left(10 - \frac{2x}{3}\right) \left(20 - \frac{x}{3}\right) \quad (3)$$

حيث  $k^*$  ثابت التناسب . ويمكن إعادة كتابة (3) على النحو

$$\frac{dx}{dt} = k (15 - x)(60 - x) \quad (4)$$

حيث  $k = \frac{k^*}{9}$  . الآن نضيف الشرطين المذكورين في المثال وهما  $x(0) = 0$  ،

$x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$  . وبفصل المتغيرات في (4) ثم إجراء التكامل نصل إلى المعادلة

$$\int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \int k dt = kt + c_1$$

أو

$$\frac{1}{45} \int \left( \frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x} \right) dx = \frac{1}{45} \ln \left( \frac{60-x}{15-x} \right) = kt + c_1$$

أو

$$\frac{60-x}{15-x} = c e^{45kt}$$

وبتطبيق الشرط الأول  $x(0) = 0$  نجد أن  $c = 4$  أو

$$\frac{60-x}{15-x} = 4e^{45kt}$$

ثم تطبيق الشرط الثاني  $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$  لنصل إلى الجواب النهائي

$$x = 15 \frac{\left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{3t} \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^{3t} \right]}$$

ومن الملاحظ أنه كلما تزايد الوقت إلى ما لانهاية ، اقتربت قيمة  $x$  من 15 كما هو متوقع .

### ٣-٥ تطبيقات بيولوجية

من المشكلات الرئيسية في علم الأحياء تلك المرتبطة بالنمو ، سواء كان ذلك النمو مرتبطاً بخلية أو عضو معين ، أو إنسان أو نبات أو عدد السكان . وقد يبدو لأول وهلة أن المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

والتي لها الحل العام

$$y = c e^{kt} \quad (1)$$

هي المعادلة المثلث التي تصف النمو عندما  $k > 0$  أو التحلل عندما  $k < 0$  (انظر مثال ١ في البند السابق) حيث  $c$  ثابت اختياري .

لكن من الواضح أن للمعادلة (1) تصورا يناقض طبيعة نمو الأشياء في بعض الأحيان ، ذلك أن  $y$  تزداد إلى ما لانهاية عندما تتجه  $t$  إلى ما لانهاية . ونحن نعلم أن النمو لا بد أن يتوقف بعد مرور بعض الوقت . والسؤال الآن : هل من الممكن تطوير المعادلة (1) لتتفق مع طبيعة العلاقات البيولوجية من حيث النمو والتحلل؟ هذا هو موضوع مثالنا التالي .

مثال ١ . وحتى تكون الصورة أكثر وضوحا لنفترض أن  $y$  تمثل طول قامة إنسان (وإن كان كما أسلفنا يمكن لها أن تمثل حجم خلية أو امتداد شجرة أو أي شيء آخر مشابه) . وحيث أن قامة الإنسان تظل ثابتة بعد مرور فترة من الزمن فلا شك أن المعادلة (1) غير صالحة لاصطاء النموذج الرياضي الملائم لهذا النمو الطبيعي لقامة الإنسان . وبصفة عامة يجب أن يكون لدينا

$$\frac{dy}{dt} = F(y); \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

حيث  $y_0$  تمثل طول قامة الإنسان عند وقت محدد  $t = 0$  ، وليكن عند مولده مثلا أو بعد مرور سنة على مولده . وبما أن إقتراح أن تكون  $F$  خطية في  $y$  ، أي  $F(y) = \alpha y$  سيؤدي إلى المعادلة (1) غير الملائمة ، فإننا مدعجون إلى التحرك خطوة أخرى إلى الأمام عن طريق اقتراح أن تكون  $F(y) = \alpha y - \beta y^2$  حيث  $\beta$  موجبة وذلك لإيقاف النمو بعد فترة من الزمن . وبذلك تصبح المعادلة (2) على النحو

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2; \quad y(0) = y_0 \quad (3)$$

وهو النموذج الرياضي المقترح لملائمة طبيعة النمو البيولوجي التي نحن بصدها . وبما أن المعادلة (3) ذات متغيرات منفصلة ، فإنه من السهل حلها ثم بإستعمال الشرط الابتدائي  $y(0) = y_0$  نصل إلى الحل النهائي

$$y = \frac{(\alpha / \beta)}{\left[ 1 + \left( \frac{\alpha / \beta}{y_0} - 1 \right) e^{-\alpha t} \right]} \quad (4)$$

ولو تركنا  $t$  تتزايد إلى ما لانهاية في المعادلة (4) لوجدنا أن أكبر قيمة ممكنة للتابع  $y$  هي

$$y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{\beta}$$

وهو ما يناسب الطبيعة البيولوجية لنمو قامة الإنسان . هذا ويمكن تحديد قيمة  $\alpha / \beta$  بالاستعانة ببعض البيانات عن طول قامة شخص ما في فترتين مختلفتين ، ولتكن  $y(t_1) = y_1$  ،  $y(t_2) = y_2$  وبالتعميـض في (4) نجد أن

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y_1^2 - y_0 y_2}{y_1(y_0 y_1 - 2y_0 y_2 + y_1 y_2)} \quad (5)$$

وبذلك يمكن إيجاد قيمة  $y$  في أي وقت لاحق . أما القيمة القصوى  $y_{\max}$  فتستصبح

$$y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{y_1(y_0 y_1 - 2y_0 y_2 + y_1 y_2)}{y_1^2 - y_0 y_2} \quad (6)$$

### ٦-٣ تطبيقات إحصائية

لعل من أهم التطبيقات الإحصائية تلك المتعلقة بزيادة عدد السكان مع مرور الوقت أو ما يسمى بإحصائيات زيادة عدد السكان . ومن الطريف أن العلاقة التي تربط هذا النمو بالزمن هي نفسها العلاقة المعطاة بالقانون (4) في البند السابق . وحيث أن وجود الإحصائيات الرسمية مهم جداً لتحديد قيمة النسبة  $\alpha / \beta$  فقد اضطررنا لضرب مثال من الغرب ، ومستمدة من أحد المراجع الأجنبية .

مثال ١ . باستعمال الجدول أدناه حدد

- ١ - الحد الأقصى لعدد سكان الولايات المتحدة من الناحية النظرية .  
ب - عدد السكان المتوقع في العام الميلادي ١٩٩٠ م .

العام الميلادي	عدد السكان بالملايين
١٩٠٠	٧٦.٠٠
١٩١٠	٩٢.٠٠
١٩٢٠	١٠٥.٧٠
١٩٣٠	١٢٢.٨٠
١٩٤٠	١٣١.٧٠
١٩٥١	١٥١.١٠
١٩٦٠	١٧٩.٣٠

جدول ١-٣

تعداد سكان الولايات المتحدة

الحل : بالرجوع إلى المعادلة (4) لتحديد قيمة  $\alpha/\beta$  فإننا سنفترض الشروط الابتدائية التالية

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2 \\ y_0 = 76.0, y_1 = 122.8, y_2 = 179.3$$

وبذلك نكون قد راعينا معدلات النمو في السنوات المعطاة حيث  $t_0$  مرتبطة بالعام ١٩٠٠ م بينما  $t_1$  مرتبطة بالعام ١٩٢٠ م ، و  $t_2$  مرتبطة بالعام ١٩٦٠ م .

١ - بالتعويض بهذه القيم أعلاه في المعادلة (6) نحصل على جواب الفقرة الأولى وهو  $y_{\max} = 346.3$  أي أنه من الناحية النظرية فلن يتجاوز عدد سكان الولايات المتحدة ٣٤٦.٣ مليون نسمة مهما امتد الزمان .

ب - لتحديد عدد سكان الولايات المتحدة في العام ١٩٩٠ نعوض في المعادلة (4) بالقيمة  $t = 3$  بعد إيجاد  $\alpha/\beta$  من المعادلة (5) فنحصل على  $y \approx 234.5$  أي أن عدد سكان الولايات المتحدة المتوقع في عام ١٩٩٠ م هو ٢٣٤.٥ مليون نسمة .

## ٧-٣ ملخص الباب

كما أشرنا في مقدمة الباب ، فإن هناك الكثير من التطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية في حياتنا الواقعية ، وأن هذه التطبيقات تشمل فروعاً كثيرة من فروع العلم .

وقد أمطينا عدة أمثلة شملت مجالات تطبيقية مختلفة كان الهدف منها إعطاء القارئ نبذة مختصرة على سبيل المثال لا الحصر . فالأمثلة كثيرة ، وعلى الراغب في الاستزادة الرجوع إلى المراجع المختلفة في هذا المجال ( انظر مثلاً Nagle and Saff ) . وسنكتفي في هذا الباب بهذه الأمثلة التي أشرنا إليها إضافة إلى التمارين العامة التالية .

## ٨-٣ تمارين عامة

١ - إذا علمنا أن مادة الراديوم تتحلل إلى مكوناتها الرئيسية بمعدل يتناسب مع الكمية التي نبدأ بها . ولنفترض أن لدينا الكمية ١٧ وأنه بعد مرور ٢٥ سنة تحلل منها ١١ في المائة تقريباً . أوجد بالتقريب عدد السنوات المطلوبة كي تتحلل نصف الكمية .  
الجواب : ١٦٠٠ سنة

٢ - لو علمنا أن لدينا مادة مشعة يتلاشى نصف مقدارها بعد ٢٨ ساعة . بعد كم من الوقت يتلاشى ٩٠ في المائة من هذه المادة المشعة ؟

الجواب : ١٢٦ ساعة

٣ - في تمام الساعة التاسعة صباحاً ، أخذنا مقياس حرارة كانت قراءته داخل البيت ٢٥ درجة مئوية إلى خارج البيت حيث الحرارة صفر مئوي . وفي الساعة التاسعة وخمس دقائق كانت القراءة ١٥ درجة مئوية . أما في الساعة التاسعة وعشر دقائق فقد أعيد إدخال المقياس إلى البيت حيث الحرارة ثابتة عند ٢٥ درجة . المطلوب :

أ - إيجاد قراءة المقياس عند الساعة التاسعة وعشرين دقيقة .

ب - الوقت الذي سنعود فيه قراءة المقياس إلى ٢٥ درجة مئوية تقريباً .

٤ - في يوم قاتظ شديد الحرارة ، وعند الظهر تماما كانت قراءة مقياس الحرارة ٢٥ درجة مئوية داخل المنزل ، ثم اخرج المقياس مباشرة إلى خارج البيت حيث الحرارة ٤٥ درجة مئوية . وبعد ثلاثة دقائق من تعرض المقياس لحرارة الجو الخارجي كانت قراءته ٢٥ درجة مئوية . وبعد برهة من الزمن أعيد المقياس إلى داخل المنزل حيث حرارة الجو ٢٥ درجة مئوية . وفي الساعة ١٢:١٠ كانت قراءة المقياس ٢٠ درجة مئوية . فمتى تم ادخال مقياس الحرارة إلى داخل البيت مرة أخرى ؟

٥ - لنفترض أن تفاعلا كيميائيا جرى حسب قانون التفاعل المعطى بالمعادلة ( 2 )  
البند ٣-٢ . إذا كان نصف المتصمر ١ تم تحويله بعد مرو ١٠ ثوان . كم من الزمن نحتاج حتى يتحول تسعة أضعاف المتصمر ١ ؟  
الجواب : ٢٣ ثانية

٦ - لنفترض أن لدينا عنصرا ١ يتناسب المعدل الزمني لتحويله مع مربع الكمية  $x$  التي لم تتحول بعد . وليكن  $k$  هو ثابت التناسب ، ولتكن  $x_0$  كمية المادة التي لم تتحول بعد عند اللحظة  $t = 0$  . أوجد قيمة  $x$  عند أي لحظة لاحقة .

$$x = \frac{x_0}{1 + x_0 k t} \quad \text{الجواب :}$$

٧ - لدينا سكن طلابي به ١٠٠ طالب كل منهم قابل للإصابة بفيروس معين . إذا كان لدينا نموذجا رياضيا بسيطا يفترض أنه خلال فترة الوباء بهذا الفيروس فإن معدل تغير عدد الطلبة المصابين بالنسبة للزمن يتناسب مع عدد الطلبة المصابين ، وليكن  $I$  وكذلك يتناسب مع عدد الطلبة غير المصابين  $(100 - I)$  . المطلوب :

أولا : إذا كان هناك طالب واحد مصاب عند البداية أي عند اللحظة  $t = 0$  . اثبت أن عدد الطلبة المصابين في أي لحظة لاحقة  $t$  هو

$$I = \frac{100 e^{100kt}}{(99 + e^{100kt})}$$

ثانيا: إذا كان ثابت التناسب  $k$  يساوي 0.01 عندما تقاس  $t$  بعدد الايام ، أوجد معدل عدد الاصابات الجديدة  $I'(t)$  في نهاية كل يوم طيلة فترة الايام التسعة الأولى.

الجواب : 1 , 3 , 8 , 16 , 24 , 23 , 14 , 6 , 3



## الباب الرابع

# المزيد عن حل المعادلات ذات الرتبة الأولى

■ مقدمة ■ تحديد عامل التكاملية ■ إيجاد عامل التكاملية ■ الإكمال ■ معادلة  
برنولي ■ المعادلات الخطية ذات المتغيرين ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .



## ١-٤ مقدمة

في الباب الثاني استعرضنا بشيء من التفصيل بعض الطرق المختلفة لحل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، ووجدنا أن ما يصلح تطبيقه من الطرق على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قد لا يجدي تطبيقه على معادلة أخرى من نفس الرتبة .

وهناك معادلات أخرى من الرتبة الأولى لا تجدي معها طرق الباب الثاني جميعها . ولهذا فإننا في هذا الباب سنتناول بشيء من التفصيل المزيد من الطرق الجديدة لمعالجة المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى .

## ٢-٤ تخمين عامل المكاملة

في البند ٢-٦ وجدنا أن أي معادلة خطية من الرتبة الأولى يمكن إيجاد حل لها عن طريق إيجاد عامل المكاملة المناسب . هذا وسيتناول البند التالي ( بند ٤-٣ ) طريقة الاختيار الملائمة لتحديد عامل المكاملة بطريقة رياضية بعيدة عن التخمين في حالة استيفاء المعادلة لشروط محددة .

أما في هذا البند فسنرى أنه يمكننا أحيانا أن نجد عامل المكاملة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى عن طريق التخمين والتخمين فقط . وربما كان هذا عائدا بالدرجة الأولى إلى بساطة المعادلة أو بساطة الصيغة التي كتبت بها المعادلة ، إلا أنها تحتاج بلا أدنى ريب إلى كثير من الخبرة والمران ، وعادة ما يتم اللجوء إلى هذه الطريقة عندما يلاحظ أحدنا بعض الحقائق المعينة عن المعادلة .

ولأن التخمين هو عنوان هذا البند ، فسنبدأ بمثال يوضح الفكرة وينير لنا الطريق .

مثال ١ . حل المعادلة التفاضلية

$$(x^2 + y^2 + y) dx - x dy = 0$$

الحل : يبدو أن جميع الطرق السابقة ستفشل في حل هذه المعادلة ، ولكن لو أعدنا كتابة المعادلة على الشكل التالي

$$(x^2 + y^2) dx + y dx - x dy = 0$$

ثم لاحظنا بطريقة أو أخرى أنه يمكن إعادة كتابتها مرة أخرى على الشكل التالي

$$dx + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$$

أو

$$dx - d \left[ \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \right] = 0$$

لحصلنا مباشرة بالتكامل على الحل

$$x - \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) = c$$

وهنا سنلاحظ أن عامل المكاملة كان بلا شك  $(x^2 + y^2)^{-1}$  ، فقد أدى ضرب المعادلة به

إلى تحويلها إلى معادلة ذات متغيرين منفصلين هما  $x$  والآخر بالطبع  $\tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$ .

ولعل من المناسب أن نذكر هنا بعض التفاضلات التامة التي عادة ما تستعمل في حل المعادلات ذات الرتبة الأولى عن طريق التخمين :

$$d(xy) = x dy + y dx \quad (1)$$

$$d \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{x dy - y dx}{x^2} \quad (2)$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2} \quad (3)$$

$$d(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4)$$

$$d(\sqrt{x^2 - y^2}) = \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad (5)$$

$$d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

$$d[\ln(x^2 + y^2)] = \frac{2(x dx + y dy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

مثال ٢. حل المعادلة التالية عن طريق إيجاد عامل المكاملة بالتخمين

$$y dx - (x - y^3) dy = 0$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على النحو التالي

$$y dx - x dy + y^3 dy = 0$$

بالقسمة على  $y^2$  (عامل المكاملة) نحصل على

$$y^{-2} (y dx - x dy) + y dy = 0$$

باستعمال (3) يتبين لنا أن المعادلة عبارة عن

$$d\left(\frac{x}{y}\right) + y dy = 0$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على

$$\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = c_1$$

أو

$$y^3 + 2x = cy$$

مثال ٢. حل المعادلة

$$x dy + (y + x^2 y^3) dx = 0$$

الحل : نبدأ بجمع الحدود التي من نفس الدرجة لنحصل على المعادلة

$$x dy + y dx + x^2 y^3 dx = 0$$

ثم نعيد كتابتها على النحو

$$d(xy) + x^2 y^3 dx = 0$$

وحيث أن المعادلة تحتوي على مشتق  $xy$  ، فإن أي معامل يعتمد على دالة في  $xy$  لن يؤثر على تكامل الحد المحتوي على مشتق  $xy$  ، لكن الحد الآخر يحتوي على التفاضلة  $dx$  ، ولهذا يجب أن يحتوي على دالة في  $x$  فقط . ولذا نقسم على  $(xy)^3$  لننتقل من  $y$  ونحصل على

$$\frac{d(xy)}{(xy)^3} + \frac{dx}{x} = 0$$

وهذه المعادلة قابلة للتكامل في هذا الوضع . وعليه فإن مجموعة الحل هي

$$-\frac{1}{2} (xy)^{-2} + \ln |x| = -\ln |c|$$

أو

$$2x^2 y^2 \ln |cx| = 1$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التالية بطريقة التضمين أو بأي طريقة أخرى :

$$(1) \quad y (2xy + 1) dx - x dy = 0$$

$$(2) \quad y (x^3 + y) dx + x (x^3 - y) dy = 0$$

$$(3) \quad y dx + (2x^3 y - x) dy = 0$$

$$(4) \quad 2v du + u (2 + u^2 v) dv = 0$$

$$(5) \quad x (x^2 + 1) dy + y (x^2 - 1) dx = 0$$

$$(6) \quad (x^3 + y) dx + (x^2 y - x) dy = 0$$

$$(7) \quad v (u^3 e^{uv} - v) du + u (v + u^3 e^{uv}) dv = 0$$

$$(8) \quad y (x^2 - y^2 + 1) dx - x (x^2 - y^2 - 1) dy = 0$$

$$(9) \quad y^2 (1 - x^2) dx + x (x^2 y + 2x + y) dy = 0$$

$$(10) \quad (x^2 y + y^3 - x) dx + (x^3 + x y^2 - y) dy = 0$$

$$(11) \quad u (u^2 v^2 - 1) dv + v (u^2 v^2 + 21) du = 0$$

$$(12) \quad (x - \sqrt{x^2 + y^2}) dx + (y - \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0$$

$$(13) \quad x^4 y' = -x^3 y - \csc xy$$

$$(14) \quad (x - x^2 - y^2) dx + (y + y^2 + x^2) dy = 0$$

$$(15) \quad [v \tan uv + 1] du + u \tan uv dv = 0$$

$$(16) \quad (y - x \sqrt{x^2 + y^2}) dx = (y \sqrt{x^2 + y^2} - x) dy$$

تلميح : ربما كان من الأفضل أن تثبت أولاً أن

$$\sqrt{x^2 + y^2} (x dx + y dy) = \frac{1}{3} d[(x^2 + y^2)^{3/2}]$$

$$(17) \quad y (y^2 - 2x) dx + x (y^2 + x) dy = 0; \quad y(2) = 1$$

$$(18) \quad y^3 (x^3 y - 2) dx + x (x^3 y^3 + 2y^2 - x) dy = 0; \quad y(1) = 1$$

$$(19) \quad -(x^3 - x y^2 + y) dx + (y^3 - x^2 y - x) dy = 0$$

$$\frac{y dx - x dy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} d \left[ \ln \left| \frac{(x - y)}{(x + y)} \right| \right] \quad \text{تلميح : اثبت أن}$$

$$(20) \quad 2(x^4 - y) dx + x dy = 0; \quad y(1) = 0$$

$$(21) \quad 2x^5 y' = y (3x^4 + y^2); \quad y(-1) = 2$$

$$(22) \quad 2x^5 y' = y (3x^4 + y^2)$$

$$(23) \quad (x^3 + 2xy^2 - x) dx + (x^2 y + 2y^3 - 2y) dy = 0$$

$$(24) \quad y' = \frac{x^3 + 2y}{x(x^2 + 1)}$$

$$(25) \quad (xy^2 + x \sin^2 x - \sin 2x) dx - 2y dy = 0$$

## ٣-٤ إيجاد عامل المكاملة

لنفترض أنه طُلب منا أن نجد حلاً للمعادلة التفاضلية

$$M dx + N dy = 0 \quad (1)$$

ولنفترض أن سائر الطرق السابقة لم تجدي لإيجاد الحل المطلوب فما هو الحل يا ترى؟  
لقد وجدنا في البند السابق أنه يمكن أحيانا تحويل معادلة غير تامة إلى معادلة تامة ذات متغيرات منفصلة يمكن مكاملتها بسهولة لإيجاد الحل . ولقنا إن تلك الطريقة تحتاج إلى خبرة ومران وصيغة معينة للمعادلة يمكن من خلالها إعادة ترتيب الحدود وإجراء عملية القسمة أو الضرب المناسبة مع إدراك أن الحدود الناتجة هي عبارة عن مشتقات لمقادير معينة في متغير أو أكثر ، وقد أطلقنا على هذه الطريقة " طريقة التخمين " .

أما في الحالة العامة ، أي تلك التي لا تتوافر فيها الشروط اللازمة لتخمين عامل المكاملة فيجدر بنا أن نسلك طريقا آخر أكثر دقة يكون خاضعا لخطوات رياضية محددة لا دخل لعامل الخبرة فيها بالقدر الذي نحتاجه في البند السابق .  
ولنرى كيف يمكننا أن نستخلص هذه الخطوات الضرورية لإيجاد عامل المكاملة ، ومن ثم إيجاد الحل المطلوب . ولنبدأ بافتراض أن الدالة  $u$  (المحتمل كونها في كلا المتغيرين  $x$  و  $y$ ) هي التي تلعب دور عامل المكاملة للمعادلة (1) فتحيلها إلى معادلة تامة هي

$$u M dx + u N dy = 0 \quad (2)$$

وبتطبيق نتائج البند ٢-٤ بد أن يكون لدينا

$$\frac{\partial}{\partial y}(u M) = \frac{\partial}{\partial x}(u N)$$

أي أن على  $u$  أن تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$u \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial x}$$

أو

$$u \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$



وبالمقابل ، لو عكسنا اتجاه الخطوات أعلاه ، لوجدنا أن تحقيق  $u$  للمعادلة (3) يجعل من  $u$  عامل مكاملة للمعادلة (1) . وبذلك نكون قد قصرنا حل المعادلة التفاضلية العادية (1) على إيجاد حل معين للمعادلة التفاضلية الجزئية (3) .

ولكننا لم نتناول في السابق حلول المعادلات التفاضلية الجزئية إطلاقاً . إذا ما الهدف الذي نسعى إليه من وراء الإنتهاء إلى المعادلة (3) وكيف يمكن الاستفادة منها لإيجاد حل للمعادلة (1) ؟

ويتضح لنا الهدف وتبين لنا الفائدة إذا عدنا مرة أخرى إلى نطاق المعادلات التفاضلية العادية عن طريق اشتراط أن تكون  $u$  دالة في متغير واحد فقط . ففي ظل هذا الشرط يمكننا المضي قدماً نحو إيجاد الحل اللازم ، وذلك على النحو التالي:

الحالة الأولى : كون  $u$  دالة في  $x$  فقط ، عندها يكون لدينا  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  ومن ثم نحل

$\frac{du}{dx}$  محل  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ، وبهذا تختزل المعادلة (3) إلى

$$u \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{du}{dx}$$

أو

$$\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx = \frac{du}{u} \quad (4)$$

ولو كان الطرف الأيسر من المعادلة (4) دالة في  $x$  فقط لاستطعنا إيجاد قيمة  $u$  فوراً ، أي أن كون

$$\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)$$

يدعونا إلى مكاملة الطرفين لنحصل على

$$\int f(x) dx = \ln u$$

أو

$$u = e^{\int f(x) dx}$$

الحالة الثانية : وبالمثل عندما تكون  $u$  دالة في  $y$  فقط ، عندها تختزل المعادلة ( 3 ) إلى المعادلة

$$u \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -M \frac{du}{dy}$$

أو

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy = g(y) dy = - \frac{du}{u} \quad (6)$$

ومن ثم نحصل على

$$u = e^{-\int g(y) dy}$$

ويمكننا تلخيص محتوى هذا البند على النحو التالي ، وذلك بعد اختيار المقدارين

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) , \quad \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

(أ) إذا كان لدينا

$$\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)$$

فإن الدالة

$$u = e^{\int f(x) dx}$$

هي عامل المكاملة للمعادلة التفاضلية

$$M dx + N dy = 0 \quad (1)$$

(ب) إذا كان لدينا

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = g(y)$$

فإن الدالة

$$u = e^{-\int g(y) dy}$$

هي عامل المكاملة للمعادلة التفاضلية ( 1 ) .

**ملحوظة هامة .** يجب على الطالب أن يتنبه إلى أن عدم تحقق أي من الحالتين أعلاه يدل على شيء واحد فقط ، وهو أنه لا يوجد للمعادلة المعنية ( ١ ) عامل مكاملة في متغير واحد فقط ، كما هو الحال في المثال الأخير من البند السابق حيث يتبين إخفاق تحقق أي من الحالتين أعلاه ، بالرغم من أن المقدار  $(xy)^{-3}$  هو عامل المكاملة للمعادلة التفاضلية في المثال المذكور .

**مثال ١ . حل المعادلة التفاضلية**

$$2y(x^2 - y + x) dx + (x^2 - 2y) dy = 0 \quad (7)$$

الحل : نجد أولاً  $\frac{\partial M}{\partial y}$  وكذلك  $\frac{\partial N}{\partial x}$  ، ثم نجد الفرق بينهما

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(x^2 - y + x) - 2y , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(x^2 - 2y) = 2N$$

وطبقاً للفقرة (١) أعلاه

$$\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{2}{N}$$

لذلك فإن الد

$$u = e^{\int f(x) dx} = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

هي عامل المكاملة الذي يحول المعادلة ( 7 ) إلى معادلة تامة يسهل معها تطبيق طريقة

البند ٢-٤ لنصل إلى مجموعة الحل

$$y(x^2 - y) = c e^{-2x}$$

**مثال ٢ .** إذا كان لدينا منحنى ذو ميل تمثله المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

ويمر بالنقطة (2,1) ، فأوجد معادلة هذا المنحنى .

الحل : لتعد كتابة المعادلة التفاضلية على النحو التالي

$$2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy = 0$$

ولتجد  $\frac{\partial M}{\partial y}$  وكذلك  $\frac{\partial N}{\partial x}$  والفرق بينهما

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

وبالقسمة على  $M$  نحصل على

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{2}{y} = g(y)$$

ثم تطبيق الفقرة (ب) أعلاه لنجد أن عامل المكاملة

$$u = e^{-\int g(y) \, dy} = e^{-\int (2/y) \, dy} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$$

وبتطبيق طريقة البند ٤-٢ نجد أن مجموعة الحل عبارة عن العائلة

$$x^2 + y^2 = cy \quad (8)$$

ولإيجاد حل معين يحقق الشرط الابتدائي  $y(2) = 1$  نعوض في المعادلة (8) لنحصل

على الحل الخاص

$$x^2 + y^2 = 5y$$

ملحوظة . يمكن حل المعادلة التفاضلية المعطاة في المثال الأخير على أنها معادلة

متجانسة .

مثال ٣ . حل المعادلة التفاضلية

$$(y^2 \cos x - y) \, dx + (x + y^2) \, dy = 0$$

الحل : نجد أولاً  $\frac{\partial M}{\partial x}$  و  $\frac{\partial N}{\partial y}$  ، ثم نجد الفرق بينهما

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \cos x - 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(y \cos x - 1)$$

وبقسمة الفرق على  $M$  نحصل على

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{2}{y}$$

وبتطبيق الفقرة (ب) نجد أن مجموعة الحل هي

$$y^2 - x = y(c - \sin x)$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$$

$$(3) \quad xy' + 3y = x^2$$

$$(4) \quad y(4x + y) dx - 2(x^2 - y) dy = 0$$

$$(5) \quad y(4x + y - 2) dx + (xy + 1) dy = 0$$

$$(6) \quad y' - \frac{2y}{x} = x^2 \sin 3x$$

$$(7) \quad v(v + 2u - 2) du - 2(u + v) dv = 0$$

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} + 3x = e^{-2t}; \quad x(0) = 5$$

$$(9) \quad (3x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0$$

$$(10) \quad x dy + y dx + 3x^2 y^4 dy = 0$$

$$(11) \quad y^2 dx + (3xy + y^2 - 1) dy = 0$$

$$(12) \quad v' = (u - 3v)^{-1}$$

$$(13) \quad (x^2 + 2y) dx - x dy = 0$$

١٤ - تنص نظرية أويلر بالنسبة للدوال المتجانسة على أنه إذا كانت  $F$  دالة

متجانسة من الدرجة  $k$  في المتغيرين  $x, y$ ، فإن

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = k F$$

استخدم نظرية أويلر لتبرهن على أنه إذا كانت الدالتان  $M$  ,  $N$  متجانستين من نفس الدرجة ، وإذا كان  $M x + N y$  لا تساوي صفرا ، فإن المقدار  $(M x + N y)^{-1}$  يكون عامل مكاملة للمعادلة التفاضلية  $M dx + N dy = 0$  .

باستخدام نتيجة التمرين السابق أوجد حلولاً للمعادلات التفاضلية التالية :

$$(15) \quad xy \, dx - (x^2 + 2y^2) \, dy = 0$$

$$(16) \quad y^2 dx + (x^2 + xy) \, dy = 0$$

$$(17) \quad x (t^2 + x^2) \, dt - t (t^2 + 2x^2) \, dx = 0$$

$$(18) \quad (x^2 + y^2) \, dx - xy \, dy = 0$$

## ٤-٤ الإحلال

ونعني به النظر إلى المعادلة التفاضلية  $M dx + N dy$  ثم محاولة الاستفادة من المقادير المتماثلة المشتملة على أكثر من متغير ، ومن ثم إحلال متغير واحد فقط بدلا منها بحيث يتسنى حل المعادلة التفاضلية المذكورة بإحدى طرق الحل التي استعرضناها في البنود السابقة . وباختصار فإننا نسمى إلى إجراء عملية تغيير للمتغيرات لنحول المعادلة من هيئة أو شكل لا يخضع لطرق البنود السابقة إلى هيئة أو شكل غير ذي غرابة علينا ، أي يمكن حلها بإحدى طرق الحل السابقة .

وتغايا للإطالة نستعرض الأمثلة التالية لإيضاح المقصود .

مثال ١ . حل المعادلة التالية

$$(3x - 2y + 1) \, dx + (3x - 2y + 3) \, dy = 0 \quad (1)$$

الحل : يبدو أن هذه المعادلة لا تنطبق عليها أي من طرق الحل السابقة ، ولكن من الملاحظ أن المقدار  $3x - 2y$  قد تكرر في كل  $M$  ,  $N$  . لذا فإننا نضع

$$u = 3x - 2y$$

عندها يكون لدينا

$$dy = \frac{1}{2} (3dx - du)$$

وتتحول المعادلة (1) إلى الشكل

$$(u+1) dx + (u+3) \left( \frac{1}{2} \right) (3dx - du) = 0$$

أو

$$2(u+1) dx + 3(u+3) dx - (u+3) du = 0$$

أو

$$(5u+11) dx - (u+3) du = 0$$

والآن يمكننا فصل المتغيرات لنحصل على

$$dx - \frac{u+3}{5u+11} du = 0$$

أو

$$5dx - \left( 1 + \frac{4}{5u+11} \right) du = 0$$

وبإجراء التكامل المطلوب نحصل على

$$5x - u + \frac{4}{5} \ln |5u+11| = c$$

وبالتعويض عن قيمة  $u$ 

$$2x + 2y - \frac{4}{5} \ln |15x - 10y + 11| = c$$

وبإعادة ترتيب الحدود والضرب في  $\frac{5}{2}$  نصل إلى مجموعة الحل

$$5(x+y+c) = 2 \ln |15x - 10y + 11|$$

مثال ٢. حل المعادلة

$$\sin y (x + \sin y) dx + 2x^2 \cos y dy = 0 \quad (2)$$

الحل : باستخدام التعويض  $w = \sin y$  يكون لدينا  $dw = \cos y \, dy$  ، وتتحول المعادلة (2) إلى

$$w(x+w) \, dx + 2x^2 \, dw = 0$$

وهي معادلة متجانسة نطبق عليها طريقة البند ٢-٥ لننتهي إلى مجموعة الحل

$$x^3 w^2 = c(3x + w)^2$$

وبالتعويض مرة أخرى عن قيمة  $w$  نصل إلى مجموعة الحل

$$x^3 \sin^2 y = c(3x + \sin y)^2$$

### تمارين

أوجد حلولاً للمعادلات التفاضلية التالية :

- (1)  $(x + 2y - 1) \, dx + 3(x + 2y) \, dy = 0$
- (2)  $\frac{dy}{dx} = (9x + 4y + 1)^2$
- (3)  $y' = \sin(x + y)$
- (4)  $(3 \tan u - 2 \cos v) \sec^2 u \, du + \tan u \sin v \, dv = 0$
- (5)  $(2t + x - 1) \, dx + (4t + 2x - 3) \, dt = 0$
- (6)  $y(x \tan x + \ln y) \, dx + \tan x \, dy = 0$
- (7)  $v' \tan u \sin 2v = \sin^2 u + \sin^2 v$
- (8)  $4(3x + y - 2) \, dx - (3x + y) \, dy = 0; \quad y(1) = 0$
- (9)  $y' = 2(3x + y)^2 - 1; \quad y(0) = 1$

### ٤-٥ معادلة برنولي Bernoulli equation

وهي معادلة مشهورة تنسب إلى إسم صاحبها عالم الرياضيات السويسري،

وتحمل الشكل العام

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

حيث  $n \neq 0$  أي عدد حقيقي . وتظهر هذه المعادلة في تطبيقات علمية متعددة ،

وسنتعرض هنا لحل هذه المعادلة عندما تكون  $n$  مساوية أو مختلفة عن الواحد .



أو لا : عندما  $n$  تساوي الواحد الصحيح . في هذه الحالة نحصل على

$$y' + P(x)y = Q(x)y$$

أو

$$y' + (P(x) - Q(x))y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة ينطبق عليها ما جاء في البند ٢-٢ .

ثانيا : عندما  $n$  لا تساوي واحدا . عندها يمكن إعادة كتابة المعادلة ( ١ ) على النحو

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{-n+1} = Q \quad (2)$$

لكن مشتقة  $y^{-n+1}$  تساوي  $y^{-n} dy$  (١- $n$ ) . وبالتالي يمكن تبسيط المعادلة ( 2 ) باستعمال التعويض

$$y^{-n+1} = z$$

ومنه ينتج لدينا

$$(1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

وبالتالي فإن اعتبار المعادلة كمعادلة في المتغيرين  $x, z$  يؤدي بنا إلى المعادلة

التفاضلية التالية بعد ضرب المعادلة ( 2 ) في القيمة غير الصفرية  $1 - n$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) P z = (1-n) Q \quad (3)$$

وهذه معادلة خطية في صيغتها القياسية ( انظر البند ٦-٢ ) . وهكذا فإن أي معادلة

تفاضلية من نوع برنولي يمكن حلها بهذا الإحلال الذي أجريناه على المتغير التابع  $y$

عدا الحالة التي تكون فيها  $n$  مساوية للواحد . فهي جالة لا تحتاج إلى أي إحلال أو

استبدال .

مثال ١ . حل المعادلة التفاضلية

$$y' = y - x y^3 e^{-2x}$$

الحل : بادئ ذي بدء نكتب المعادلة في هيئة معادلة برنولي

$$y' - y = -x e^{-2x} y^3$$

حيث

$$P(x) = -1, Q(x) = -xe^{-2x}, n = 3$$

الآن نقسم كل حد في المعادلة على  $y^3$  ونضرب في  $dx$  لنحصل على

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - y^{-2} = -xe^{-2x} \quad (4)$$

ثم نجري الإحلال  $z = y^{-2}$ ، ومنه  $dz = -2y^{-3} dy$  . وبالتعويض في (4) بعد ضربكل حد فيها في -2 نصل إلى الصيغة الخطية في  $z$ 

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 2xe^{-2x} \quad (5)$$

ثم نجد قيمة عامل المكاملة

$$v(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

الآن نضرب المعادلة (5) في  $e^{2x}$  لنحصل على

$$e^{2x} \frac{dz}{dx} + 2e^{2x}z = 2x$$

أو

$$\frac{d}{dx} (e^{2x}z) = 2x$$

وبمكاملة الطرفين بالنسبة إلى  $x$  نصل إلى

$$e^{2x}z = x^2 + c$$

ومنه ينتج لدينا بعد التعويض عن قيمة  $z$  أن مجموعة الحل المطلوبة هي

$$e^{2x} = y^2 (x^2 + c)$$

مثال ٢. المعادلة

$$xy dx + (x^2 - 3y) dy = 0$$

عبارة عن معادلة برنولي في  $x$ ، أي أن شكلها العام بعد القسمة على  $xy dy$  هو

$$\frac{dx}{dy} + y^{-1}x = 3x^{-1}$$

حيث

$$P(y) = y^{-1}, Q(y) = 3, n = -1$$

## تمارين

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

(1)  $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

(2)  $6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0$

(3)  $y' - y = xy^2$

(4)  $2xyy' = y^2 - 2x^3; y(1) = 2$

(5)  $y' = \alpha y - \beta y^n, n \neq 0, 1$  ( ثوابت  $\alpha, \beta$  )

(6)  $(y^4 - 2xy)dx + 3x^2dy = 0; y(2) = 1$

(7)  $(2y^3 - x^3)dx + 3xy^2dy = 0; y(1) = 1$  حل بطريقتين مختلفتين

(8)  $(u^2 + 6v^2)du - 4uv dv = 0; v(1) = 1$  حل بثلاث طرق مختلفة

(9)  $xy' + y = x^4y^3$

(10)  $xy^2y' + y^3 = x \cos x$

(11)  $y' - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$

(12)  $y' - y = e^{2x}y^3$

(13)  $y' = 2yx^{-1} - x^2y^2$

(14)  $v' + v^3u + \frac{v}{u} = 0$

(15)  $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + 2xy}{y^2}$

## ٦-٤ المعادلات الخطية ذات المتغيرين

لنلق نظرة على المعادلة التفاضلية

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \quad (1)$$

حيث  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  جميعها ثوابت . ونلاحظ أنه عندما تكون قيمتا  $c_1, c_2$  مساوية للصفر فإن المعادلة تصبح معادلة متجانسة من الدرجة الأولى في

كل من  $x, y$  ، ويصبح حلها أمرا سهلا للغاية . ولهذا كان من الطبيعي جدا أن نحاول أن نجعل من المعادلة ( 1 ) معادلة متجانسة ، وهذا ما نحن بصدده هنا .

ولنبدأ بكتابة معاملي  $dx$  و  $dy$  على هيئة معادلتين خطيتين

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

وهذان الخطان إما أن يكونا متوازيين ، وإما أن يتقاطعا . هذا في حالة تمثيلهما لخطين فعلا ، أي عندما يكون أحد الثابتين  $a_1, b_1$  على الأقل مختلفا عن الصفر ، وكذلك الحال بالنسبة للثابتين  $a_2, b_2$  . ذلك أنه في حالة كون كلا من  $a_1, b_1$  مساويا للصفر في نفس الوقت فإن المعادلة ( 1 ) تصبح خطية بالنسبة للمتغير  $x$  . هذا وينطبق على  $y$  ما انطبق على  $x$  . إذا نحن أمام خيارين أو حالتين :

الحالة الأولى: عندما يتقاطع الخطان الممثلان بالمعادلة ( 2 ) . ولنفترض أن  $(h, k)$  هي نقطة التقاطع . عندها نستعمل التعويض

$$\begin{aligned} x &= u + h \\ y &= v + k \end{aligned}$$

وباستعمال هذا التعويض في المعادلة ( 2 ) مع ملاحظة أن النقطة  $(h, k)$  تحل المعادلتين (2) حلا آتيا ) نحصل على معادلتين لمستقيمين يمران عبر نقطة الأصل في النظام الإحداثي الجديد . وبمعنى آخر فإننا نحصل على المعادلتين

$$\begin{aligned} a_1u + b_1v &= 0 \\ a_2u + b_2v &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

و حيث أن  $dx = du$  و  $dy = dv$  ، فإن التعويض الذي تمثله المعادلة ( 3 ) سيحول المعادلة التفاضلية ( 1 ) إلى معادلة تفاضلية جديدة هي

$$(a_1u + b_1v) du + (a_2u + b_2v) dv = 0 \quad (5)$$

وهي معادلة نعرف كيف نتعامل معها من خلال ما تعلمناه سابقا .

الحالة الثانية : إذا كان الخطان اللذان تمثلهما المعادلة ( 2 ) لا يتقاطعان ، أي أنهما متوازيان . وذلك يعني وبإيجاز وجود ثابت  $k$  بحيث أن

$$a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية ( 1 ) على الشكل

$$(a_1x + b_1y + c_1) dx + [k(a_1x + b_1y) + c_2] dy = 0 \quad (6)$$

مندها نلجأ إلى إحلال متغير جديد هو  $w$  محل المقدار  $a_1x + b_1y$  نظراً لتكرره في المعادلة ( 6 ) ومنه ينتج لدينا

$$dw = a_1 dx + b_1 dy$$

ويكون لدينا خيار إستبدال  $dx$  أو  $dy$  . وتحت أي من الخيارين ننتهي إلى معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة نظراً لأن معاملها يشتملان فقط على  $w$  وثوابت .

### طريقة حل المعادلات ذات المعاملات الخطية

الشكل العام للمعادلة

$$(a_1x + b_1y + c_1) dx + (a_2x + b_2y + c_2) dy = 0 \quad (1)$$

(1) حل المعادلتين الخطيتين التاليتين أنياً

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (2)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

فإذا وُجد حل وحيد  $(h, k)$  نجري التعويض

$$x = u + h$$

$$y = v + k$$

في المعادلة الأصلية مع استبدال  $dx$  و  $dy$  لنحصل على معادلة تفاضلية متجانسة .

(ب) إذا لم يكن هناك حل للمعادلة ، أي أن الخطين متوازيان لا يلتقيان ، مندها نجري الإحلال

$$w = a_1x + b_1y$$

لننتهي إلى معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة . هذا ويمكن التأكد من ذلك مباشرة إذا كان  $a_2b_1 = a_1b_2$  ، فعندها تعلم أن الخطين متوازيان دون الحاجة إلى حل المعادلتين آنياً .

مثال ١ . حل المعادلة التفاضلية

$$(-3x + y + 6) dx + (x + y + 2) dy = 0 \quad (7)$$

الحل : حيث أن  $a_1 b_2 = -3$  لا يساوي  $a_2 b_1 = 1$  ، فلا بد من أن يكون للمعادلتين

$$-3x + y + 6 = 0$$

$$x + y + 2 = 0$$

حل أني وحيد هو  $x = 1, y = -3$  ، أي أن نقطة التقاطع هي  $(1, -3)$  . الآن نقوم بإجراء التعويض  $x = u + 1, y = v - 3$  ، ومنه نجري التعويض  $dx = du$  ، وكذلك

$dy = dv$  في المعادلة ( 7 ) لنصل إلى الصيغة الجديدة

$$(-3u + v) du + (u + v) dv = 0$$

وهي معادلة متجانسة نطبق عليها ماتعلمناه سابقا لنصل إلى مجموعة الحل النهائي

$$v^2 + 2uv - 3u^2 = c$$

وبالتعويض من  $u$  و  $v$  نصل إلى حل المعادلة ( 7 )

$$(y + 3)^2 + 2(x - 1)(y + 3) - 3(x - 1)^2 = c$$

مثال ٢ . حل المعادلة التفاضلية

$$(2y - x - 1) dx - (6y - 3x + 2) dy = 0 \quad (8)$$

الحل : حيث أن  $a_1 b_2 = 6 = a_2 b_1$  ، فلا بد أن يكون الضمان اللذان تمثلهما المعادلتان

$$2y - x - 1 = 0$$

$$6y - 3x + 2 = 0$$

متوازيين . وكما هو متوقع نجري الإحلال  $w = 2y - x$  ، ومنه نحصل على

$$dx = 2dy - dw$$

وبالتعويض في المعادلة ( 8 ) نحصل على

$$(w - 1)(2 dy - dw) - (3w + 2) dy = 0$$

وبعد جميع الحدود المتشابهة نحصل على المعادلة

$$(w - 1) dw + (w + 4) dy = 0$$

والتي يمكن حلها بسهولة

$$w + y + c - 5 \ln |w + 4| = 0$$

وعليه فإن حل المعادلة يتمثل في مجموعة الحل

$$3y - x + c = 5 \ln |2y - x + 4|$$

تعريف. معادلة لاجرانج هي معادلة تفاضلية على الصورة

$$y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

حيث

$$f\left(\frac{dy}{dx}\right) \neq \frac{dy}{dx}$$

وإذا افترضنا أن كلا من  $f, g$  دالة قابلة للاشتقاق ، فإننا نحصل على الحل العام

بالطريقة التالية : نضع  $\frac{dy}{dx} = p$  فنحصل مباشرة على

$$y = x f(p) + g(p) \quad (1)$$

باشتقاق طرفي المعادلة (1) بالنسبة للمتغير  $x$  نحصل على

$$p = x f'(p) \frac{dp}{dx} + f(p) + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

أو

$$p - f(p) = \left(\frac{dp}{dx}\right) [x f'(p) + g'(p)]$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

أي أن

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{p - f(p)} x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى حلها العام هو :

$$x e^{\int \frac{f'(p)}{f(p)-p} dp} = \int \frac{g'(p)}{p-f(p)} e^{\int \frac{f'(p)}{f(p)-p} dp} dp + c \quad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) يمثلان الحل العام لمعادلة لاجرانج في صورة بارامترية ، وإذا

استطعنا حذف  $p$  من المعادلتين (1) ، (2) فإننا نحصل على علاقة بين  $y, x$

والثابت الاختياري  $c$  .

مثال ٣ . أوجد الحل العام ( في صورة بارامترية ) للمعادلة

$$y = 2x \frac{dy}{dx} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^5$$

الحل : نضع  $p = \frac{dy}{dx}$  فنحصل على

$$y = 2xp + p^2 - p^5 \quad (3)$$

وبحساب المشتقة الأولى للطرفين بالنسبة للمتغير المستقل  $x$  نحصل على

$$p = 2xp' + 2p + (2p - 5p^4) p'$$

ومنه

$$-p = 2xp' + (2p - 5p^4) p'$$

وبأخذ العامل المشترك

$$-p = (2x + 2p - 5p^4) \frac{dp}{dx}$$

وبالقسمة على  $p$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = 5p^3 - 2$$

إذا الحل العام للمعادلة الأخيرة هو

$$\begin{aligned} xp^2 &= \int p^2(5p^3 - 2) dp \\ &= \frac{5p^6}{6} - \frac{2}{3} p^3 + c \end{aligned} \quad (4)$$

وكما يتضح فإن المعادلتين (3)، (4) تمثلان الحل العام في صورة بارامترية .

تمارين

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

- (1)  $(x + 2y - 4) dx - (2x + y - 5) dy = 0$
- (2)  $(-3x + y - 1) dx + (x + y + 3) dy = 0$
- (3)  $(v - 2) du + (v - u + 1) dv = 0$



$$(4) \quad (2x + y + 4) dx + (x - 2y - 2) dy = 0$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y} - 1$$

$$(6) \quad (u - 4v - 9) du + (4u + v - 2) dv = 0$$

$$(7) \quad (3x - y - 6) dx + (x + y + 2) dy = 0$$

$$(8) \quad (2w - z) dw + (4w + z - 6) dz = 0$$

$$(9) \quad (x - y - 2) dx + (x + y) dy = 0$$

$$(10) \quad (x + y - 1) dx + (2x + 2y + 1) dy = 0$$

$$(11) \quad (x - 2) dx + 4(x + y - 1) dy = 0$$

$$(12) \quad (u - 4v - 3) du - (u - 6v - 5) dv = 0$$

$$(13) \quad (y - 3x + 2) dy + 3(3x + y - 4) dx = 0$$

$$(14) \quad (6u - 3v + 2) du + (v - 2u + 1) dv = 0$$

$$(15) \quad (x - 1) dx - (3x - 2y - 5) dy = 0$$

$$(16) \quad (9u - 4v + 4) du - (2u - v + 1) dv = 0$$

$$(17) \quad (x + 3y - 4) dx + (x + 4y - 5) dy = 0$$

$$(18) \quad (2x - 3y + 4) dx + 3(x - 1) dy = 0; \quad y(3) = 2$$

$$(19) \quad (u + v - 4) du + (v - 3u + 4) dv = 0; \quad v(4) = 1$$

$$(20) \quad (2u - 3v + 4) du + 3(u - 1) dv = 0; \quad v(3) = 2$$

$$(21) \quad (x + y - 4) dx + (y - 3x + 4) dy = 0; \quad y(3) = 7$$

## ٧-٤ ملخص الباب

لقد عالجتنا في هذا الباب عدة أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ، وناقشنا كيفية إيجاد مجموعة الحل التابعة لكل نوع من هذه المعادلات على حدة . وفيما يلي ملخص شامل لهذه الأنواع :

(I) معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات تامة بمجرد التخمين . ونعني بالتخمين تخمين عامل المكاملة تخميننا يعتمد على الخبرة والمران .

(ب) معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات تامة إذا توافر فيها أحد الشرطين التاليين :

١- إذا كان المقدار  $\left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N$  يعتمد على  $x$  فقط ونرمز له بالمقدار  $f(x)$  .

٢- إذا كان المقدار  $\left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / M$  يعتمد على  $y$  فقط ونرمز له بالمقدار  $g(y)$  .

هذا بافتراض أن المعادلة التفاضلية معطاة على الصورة  $M dx + N dy = 0$  . وفي

حالة تحقق الشرط الأول ، فإن الدالة  $u(x) = e^{\int f(x) dx}$  تلعب دور عامل المكاملة الذي يحقق تمام المعادلة بخبرها فيه . أما في حالة تحقق الشرط الثاني فإن الدالة

$v(y) = e^{-\int g(y) dy}$  هي التي تلعب دور عامل المكاملة .

(ج) أما الإحلال فنأشئ عن طبيعة المعادلة نفسها ويحتاج إلى دراسة وتدقيق من القارئ لاختيار الإحلال المناسب الذي يحيل المعادلة من وضعها المستعصي إلى وضع سليم مناسب يسهل حله بالطرق السابقة التي ألفناها .

(د) معادلة برنولي  $y^n + P(x)y = Q(x)$  . عندما  $n$  لا تساوي صفراً أو واحداً فإننا

نلجأ إلى التعويض  $z = y^{n+1}$  ، ومنه  $\frac{dz}{dy} = (1+n)y^n$  . وباكتمال إجراءات

التعويض في المعادلة نحصل على معادلة خطية في صيغتها القياسية بالنسبة للمتغير  $z$  .

(هـ) المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية في متغيرين ، وهي على الصيغة

$$(a_1x + b_1y + c_1) dx + (a_2x + b_2y + c_2) dy = 0$$

إذا كانت  $a_1b_2 \neq a_2b_1$  نجرى التعويض  $x = u + h$  و  $y = v + k$  حيث  $h, k$

يحققان أنيا المعادلتين التاليتين

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

عندها تتحول المعادلة بفضل هذا التعويض إلى معادلة متجانسة .

أما إذا كانت  $a_1b_2 = a_2b_1$  ، فإنه يكون لدينا  $a_1h + b_1k = \alpha(a_2h + b_2k)$  .

وعندها نكتفي بالتعويض  $w = a_1x + b_1y$  .

## ٨-٤ تعاريف هامة

فيما يلي أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad (y^2 - 3y - x) dx + (2y - 3) dy = 0$$

$$(2) \quad y' = \frac{e^{x+y}}{y-1}$$

$$(3) \quad u(u - 3v^2 - 1) dv + (v^3 + v + 1) du = 0$$

$$(4) \quad (y^3 + y + 1) dx + x(x - 3y^2 - 1) dy = 0$$

$$(5) \quad y' - \frac{y}{x} = x^2 \sin 2x$$

$$(6) \quad 2xy dx + (y^5 - x^2) dy = 0$$

$$(7) \quad (v + 3u - 5) dv - (v - u - 1) du = 0$$

$$(8) \quad (2x + y - 4) dx + (x - 3y + 12) dy = 0$$

$$(9) \quad (u - 4v + 7) du + (u + 2v + 1) dv = 0$$

$$(10) \quad y^3 \sec^2 x dx - (1 - 2y^2 \tan x) dy = 0$$

$$(11) \quad w z dw + (z^4 - 3w^2) dz = 0$$

$$(12) \quad x^3 y dx + (3x^4 - y^3) dy = 0$$

$$(13) \quad y' + 2y = y^2$$

$$(14) \quad (v - 2u - 1) du + (u + v - 4) dv = 0$$

$$(15) \quad (5x + 3e^y) dx + 2x e^y dy = 0$$

$$(16) \quad (x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

$$(17) \quad 2(u - v - 2) dv + (u - 3v + 4) du = 0$$

$$(18) \quad y dx = x(1 + xy^4) dy$$

$$(19) \quad (x - 2) dx + 4(y + x - 1) dy = 0$$

$$(20) \quad (3x - y - 5) dx + (x - y + 1) dy = 0$$

$$(21) \quad (x^3 - y) dx + x dy = 0; \quad y(1) = 3$$

$$(22) \quad 2x \, dv + v (2 + v^2 x) \, dx = 0; \quad v(1) = \frac{1}{2}$$

$$(23) \quad (2x - 3y + 1) \, dx - (3x + 2y - 4) \, dy = 0; \quad y(1) = 1$$

$$(24) \quad (u + 4v + 3) \, du - (2u - v - 3) \, dv = 0$$

$$(25) \quad (x - y - 1) \, dx + 2 (2 - y) \, dy = 0$$

$$(26) \quad (2x + 4y - 1) \, dx - (x + 2y - 3) \, dy = 0$$

$$(27) \quad 4u \, dv + 3 (2v - 1) (du + u^4 \, dv) = 0; \quad v(1) = 1$$

$$(28) \quad y' - \frac{2y}{x} = (xy)^{-1}; \quad y(1) = 3$$

$$(29) \quad y(x - 1) \, dx - (x^2 - 2x - 2y) \, dy = 0; \quad y(1) = -1$$

$$(30) \quad (6uv - 3v^2 + 2v) \, du + 2(u - v) \, dv = 0; \quad y(0) = 1$$

$$(31) \quad (x - y + 2)^2 \, dy + 4 \, dx = 0$$

البحث الخامس

## المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا

■ مقدمة ■ الاستقلال الخطي ونظرية وجود حل وحيد ■ قيمة الزولسكيان ■ الحل العام  
للمعادلة المتجانسة ■ الحل العام للمعادلة غير المتجانسة ■ المؤثر التفاضلي ■ المنهج عن المؤثر  
التفاضلي ■ ملخص الباب .



## ١-٥ مقدمة

في الأبواب السابقة إنصبَّ جُلُّ إهتمامنا على دراسة الطرق المختلفة الكفيلة بحل أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ، أي تلك التي تشتمل على  $dy/dx$  فقط أو مايعادلها رياضيا مثل  $y'$  . وفي هذا الباب نسعى لدراسة معادلات تفاضلية ذات رتبة أعلى من الرتبة الأولى دراسة ذات صيغة عامة موحدة نقدم من خلالها النظرية الأساسية والركيزة الرئيسية لمعالجة هذا النوع من المعادلات ذات الرتبة المتقدمة .

ولعل أنسب ما نبدأ به هذه المعالجة هو إعادة استذكار الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة  $n$  ، والتي تحمل الشكل التالي :

$$b_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + b_n(x) y = R(x) \quad (1)$$

حيث الدوال  $b_0, b_1, \dots, b_n, R$  تعتمد على المتغير  $x$  فقط ومستقلة تماما عن  $y$  . ويقال للمعادلة ( 1 ) أنها ذات معاملات ثابتة إذا كان كل من  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ثابتا . ويقال عن المعادلة نفسها أنها ذات معاملات متغيرة إذا كان أي من  $b_0, b_1, \dots, b_n$  متغيرا . كما يقال للمعادلة ( 1 ) أنها متجانسة إذا كانت  $R(x) = 0$  ، وإلا فهي غير متجانسة .

**حقيقة ١.** إذا كان كل من  $y_1$  و  $y_2$  حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$b_0(x) y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x) y' + b_n(x) y = 0 \quad (2)$$

وإذا كان  $c_1, c_2$  ثابتين ، فإن الدالة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

تمثل أيضا حلا للمعادلة ( 2 ) .

**البرهان :** يأتي ماذا نعني بأن  $y_1$  تمثل حلا للمعادلة ( 2 ) ؟ لا شك أن الجواب الرياضي على هذا السؤال هو أن  $y_1$  تحقق للمعادلة ( 2 ) ، أو بمعنى آخر

$$b_0(x) y_1^{(n)} + b_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x) y_1' + b_n(x) y_1 = 0 \quad (3)$$

وكذلك الحال بالنسبة إلى  $y_2$  :

$$b_0(x) y_2^{(n)} + b_1(x) y_2^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x) y_2' + b_n(x) y_2 = 0 \quad (4)$$

الآن لنضرب كل حد في المعادلة ( 3 ) بالثابت  $c_1$  ، وكل حد في المعادلة ( 4 ) بالثابت  $c_2$  ، ثم نجمع المعادلتين لنحصل على

$$b_0(c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}) + b_1(c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)}) + \dots + b_{n-1}(c_1 y_1' + c_2 y_2') + b_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0 \quad (5)$$

بحيث أن

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'$$

وكذلك الحال بالنسبة للمشتقات العليا

$$c_1 y_1^{(k)} + c_2 y_2^{(k)} = (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(k)}$$

فانه مامن شك أنه يمكننا إعادة كتابة المعادلة ( 5 ) على النحو التالي

$$b_0(c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + b_1(c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + b_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0 \quad (6)$$

ولو أننا اخترنا

$$w = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

لتبين لنا على الفور أن  $w$  يحقق المعادلة ( 2 ) كما هو المطلوب اثباته . أما الحالة التي تكون فيها  $c_1 = 0$  أو  $c_2 = 0$  فيبدئية ، حيث أن أي حل لمعادلة متجانسة يعني أن ضربه في ثابت سيكون هو الآخر حلا بالتأكيد . وهذا هو تمام البرهان .



وبالمثل فإنه إذا كان كل من  $y_1, y_2, \dots, y_k$  حلاً للمعادلة (2) فإن أي تشكيل خطي سيكون حلاً للمعادلة نفسها ، وبمعنى آخر إذا كانت  $c_1, c_2, \dots, c_k$  ثوابت حقيقية ، فإن

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k$$

يمثل حلاً للمعادلة نفسها . هذا ويمكننا صياغة الحقيقة السابقة وما تلاها من نقاش على النحو التالي :

نظرية ١ . أي تشكيل خطي من حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة يشكل حلاً للمعادلة نفسها .

## ٢-٥ الاستقلال الخطي ونظرية وجود حل وحيد

في هذا البند سنتحدث من مفهوم الاستقلال الخطي لمجموعة من الدوال وعلاقة ذلك بحلول المعادلة الخطية المتجانسة ، كما سنتعرض بإيجاز لنظرية وجود الحل ووحدايته . ثم نناقش ما يُسمى بالرونسكيان وهو مقدار محددة ذات علاقة وثيقة بالحلول المستقلة للمعادلة المتجانسة ، وعن طريقه يمكن الاستدلال على استقلالية عدد من الحلول الموجودة .

تعريف . لتكن  $f_1, f_2, \dots, f_k$  مجموعة معينة من الدوال . إذا أمكن إيجاد ثوابت

$c_1, c_2, \dots, c_k$  ليست جميعها مساوية للصفر بحيث أن

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k = 0 \quad (1)$$

لجميع قيم  $x$  في فترة مغلقة  $[a, b]$  ، مندها نقول أن الدوال  $f_1, f_2, \dots, f_k$  غير مستقلة خطياً .

أما إذا استحال وجود ثوابت تحقق المعادلة (1) خلال أي فترة  $[a, b]$  ، فإن هذه المجموعة من الدوال توصف بأنها مستقلة خطياً ، أي أنه لا يمكن للمعادلة (1) أن تتحقق إلا في حالة واحدة فقط ، وهي أن تكون جميع الثوابت مساوية للصفر .

ملاحظة. يتضح لنا من تعريف الدوال غير المستقلة خطيا أن أحد هذه الدوال على الأقل يمكن كتابته كتشكيل خطي من الدوال الأخرى في المجموعة نفسها ، فمثلا في المعادلة (1) لو أن  $c_3 \neq 0$  لا يساوي صفرا ، فإنه يمكننا قسمة جميع الحدود على  $c_3$  لنحصل على

$$f_3 = (-1/c_3) [c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_4 f_4 + \dots + c_n f_n] \quad (2)$$

وبالطبع فإنه يستحيل علينا كتابة ذلك إذا كانت المجموعة مستقلة خطيا .

وفي البند ٢-٢ تحدثنا عن نظرية وجود الحل ووحدانيته للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى . وفيما يلي نص لنظرية تُعد تعميما أو تطويرا لهذه النظرية بحيث تشمل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة العليا . ولكن قبل أن نبدأ فإننا نعود إلى المعادلة (1) في البند السابق ، وبافتراض أن  $b_0 \neq 0$  لا تساوي الصفر لأي نقطة في الفترة  $I$  التي تمثل حيز التعريف للدوال  $R, b_k$  . هنا يمكننا القسمة على  $b_0$  لنحصل على الصيغة القياسية للمعادلة (1) ، وهي كالتالي :

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = R \quad (3)$$

نظرية وجود الحل ووحدانيته . لتكن  $P_1, \dots, P_n, R$  دوالاً متصلة على الفترة  $(a, b)$  . لنفترض أن  $x_0$  نقطة داخل الفترة المفتوحة  $(a, b)$  ، وأن  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  عبارة عن  $n$  من الأعداد المعطاة . عندها يوجد دالة وحيدة معرفة على الفترة  $(a, b)$  تمثل حلا للمعادلة التي أشرنا إليها أعلاه ، وهي

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = R \quad (3)$$

على الفترة  $(a, b)$  وتحقق الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

أما البرهان فلن نتناوله هنا ، وإنما يكفينا نص النظرية لأهميتها الكبيرة بالنسبة للبند القادم .

وفيما يلي مثالا يوضح نص النظرية وتطبيقها .

مثال ١. ليس من الصعب التأكد من أن كلا من الدالتين

$$y_1(x) = e^{2x} \cos 3x , \quad y_2(x) = e^{2x} \sin 3x$$

يمثل حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات الرتبة الثانية

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad (4)$$

المطلوب إيجاد حل للمعادلة (4) يحقق الشرطين الابتدائيين

$$y(0) = 2 , \quad y'(0) = -5 \quad (5)$$

الحل : طبقا للحقيقة ١ ، فإن أي تشكيل على النحو

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x \quad (6)$$

حيث  $c_1, c_2$  ثوابت اختيارية ، يمثل حلا للمعادلة (4) ولهذا فإنه يتوجب علينا اختيار ثابتين اختياريين مناسبين بحيث تحقق  $y(x)$  الشرطين (5) إضافة إلى المعادلة (4) . بمفاضلة (6) نحصل على

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1 (2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x) \\ &+ c_2 (3e^{2x} \cos 3x + 2e^{2x} \sin 3x) \end{aligned} \quad (7)$$

وبالتعويض من (6) و (7) في الشرطين (5) نحصل على

$$y(0) = 2 = c_1 , \quad y'(0) = -5 = 2c_1 + 3c_2$$

وبإجراء التبسيط اللازم نحصل على  $c_1 = 2$  ,  $c_2 = -3$  . وبالتعويض منهما في المعادلة نحصل على الحل الوحيد

$$y(x) = 2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x$$

### ٣-٥ قيمة الـ ورونسكيان Wronskian

سبق أن عرضنا في البند السابق مفهوم الاستقلال الخطي لمجموعة من الدوال المعرفة على الفترة  $[a, b]$  . وسنحاول هنا الإفادة من قيمة محددة determinant ذات علاقة وطيدة بحلول المعادلة ، فنستدل من مخالفة قيمة هذه المحددة للصفر على استقلالية هذه الحلول والعكس كذلك صحيح تحت بعض الشروط .

تعريف . لنفترض أن كلا من الدوال  $f_1, f_2, \dots, f_n$  قابلة للاشتقاق  $n-1$  مرة على الأقل في الفترة  $(a, b)$  . عندها نطلق على الدالة الناتجة من مقدار المحددة

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W[f_1, \dots, f_n](x)$$

رونسكيان الدوال  $f_1, f_2, \dots, f_n$

مثال ١ . لو أن  $f_1, f_2$  دالتان قابلتان للاشتقاق على الفترة  $[0,1]$  ، فإن رونسكيان  $f_1, f_2$  يساوي

$$W[f_1, f_2](x) = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x)$$

نظرية ٢ . لنفترض أن المجموعة  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  تمثل مجموعة من الحلول على الفترة  $(a, b)$  للمعادلة التفاضلية

$$y^{(n)}(x) + P_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + P_n(x)y(x) = 0$$

حيث  $P_1, P_2, \dots, P_n$  دوال متصلة على  $(a, b)$  ذات رونسكيان يختلف عن الصفر عند أي نقطة  $x_0$  داخل الفترة  $(a, b)$  ، أو

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$$

عندها تكون مجموعة الحلول  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  مستقلة خطياً .

ولن نتعرض هنا لإبرهان هذه النظرية ، بل سنكتفي بعرض المثال التالي :

مثال ١ . هل الدوال التالية

$$y_1(x) = x \quad , \quad y_2(x) = x^2 \quad , \quad y_3(x) = \frac{1}{x}$$

تبتل مجموعة من الحلول المستقلة خطياً للمعادلة التفاضلية

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0, \quad x > 0$$

الحل : السؤال يفترض أن هذه الدوال تمثل حلولاً فعلية للمعادلة . ويمكن القارئ التأكد من ذلك بسهولة بمجرد التعميؤ في المعادلة . ولكن السؤال منصّب على بحث الاستقلالية الخطية لهذه الحلول . والجواب على ذلك يتم باستعمال النظرية السابقة التي تدمونا إلى إيجاد قيمة رونسكيان

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = \frac{6}{x}$$

وهو ذو قيمة تختلف عن الصفر لجميع قيم  $x$  الأكبر من الصفر . وبهذا تتحقق الاستقلالية الخطية لهذه المجموعة من الحلول .

هذا ونختتم هذا البند بنظرية أكثر شمولاً من النظرية السابقة وأهم نفعا .

نظرية ٣ . بإفتراض أنه على الفترة  $(a, b)$  تكون  $\{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n\}$  مجموعة من الدوال المتصلة وبشرط أن يكون  $b_0(x) \neq 0$  ، فإن مجموعة الحلول المحققة للمعادلة التفاضلية

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0$$

ستكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان رونسكيان الدوال  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  لا يساوي صفراً على الفترة  $(a, b)$  .

ملاحظة . أطلق إسم رونسكيان على هذه المصدة تخليداً للذكرى مكتشفه عالم الرياضيات البولندي هوني رونسكي Hoene Wronski الذي عاش خلال الفترة من ١٧٧٨ إلى ١٨٥٣ بعد الميلاد .

مثال ٢ . مجموعة الدوال  $\{\cos wt, \sin wt, \sin(wt + \alpha)\}$  غير مستقلة خطيا ، حيث  $t$  هو المتغير بينما  $w$  و  $\alpha$  ثوابت . وذلك يعني وجود ثوابت  $c_1, c_2, c_3$  ليست جميعها صفرية بحيث أن

$$c_1 \cos wt + c_2 \sin wt + c_3 \sin(wt + \alpha) = 0$$

لجميع قيم  $t$  . وبالفعل فإن إحدى هذه الاختيارات لمجموعة الثوابت يمكن ان تكون

$$c_1 = \sin \alpha, \quad c_2 = \cos \alpha, \quad c_3 = -1.$$

تعاريف

- ١ - أوجد رونسكيان مجموعة الدوال  $\{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\}$  حيث  $k$  أكبر من 1.
- ٢ - اثبت أن مجموعة الدوال  $\{e^{3x}, e^{-x}, e^{5x}\}$  مستقلة خطيا لكل قيم  $x$  الحقيقية .
- ٣ - أوجد رونسكيان المجموعة  $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$  . هل هذه المجموعة مستقلة خطيا ؟ علل !

٤ - اثبت أن الدوال

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = xe^x, \quad f_3(x) = e^x, \quad f_4(x) = (2 - 3x)e^x$$

غير مستقلة خطيا ، وذلك بإيجاد مجموعة ثوابت  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  ليست جميعها صفرا بحيث تتحقق المتطابقة

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) = 0$$

## ٥-٤ الحل العام للمعادلة المتجانسة

اعتمادا على ما سبق من بنود في هذا الباب ، فإنه يمكننا أن نقدم هنا واحدة من أهم النتائج التي تعتمد عليها نظرية المعادلات التفاضلية .

نظرية ٤ . لنفترض أن مجموعة الدوال  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  تمثل حولا مستقلة خطيا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0 \quad (1)$$

حيث  $x$  عنصر في الفترة  $(a, b)$  ، بينما الدوال  $\{b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)\}$  كلها متصلة ، وأن  $b_0(x) \neq 0$  على الفترة  $(a, b)$  . إذا كانت الدالة  $\phi$  تمثل حلا للمعادلة (1) على الفترة  $(a, b)$  ، فلا بد من وجود ثوابت  $\{c_1^*, c_2^*, \dots, c_{n-1}^*, c_n^*\}$  بحيث أن

$$\phi = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 + \dots + c_n^* y_n \quad (2)$$

البرهان : سنكتفي هنا باستعراض أهم خطوات البرهان عندما  $n = 2$  ، وهي نفس الخطوات اللازمة عندما تكون  $n$  أكبر من 2 . ولنبدأ بالمعادلة التفاضلية

$$b_0(x) y'' + b_1(x) y' + b_2(x) y = 0 \quad (3)$$

ولتكن الدالتان  $y_1, y_2$  حلين مستقلين خطيا للمعادلة (3) على الفترة  $(a, b)$  . ولتكن  $x_0$  أي نقطة في  $(a, b)$  . بتطبيق النظرية ٢ في البند السابق ، نستنتج بأن رونسكيان  $\{y_1, y_2\}$  يختلف عن الصفر عند النقطة  $x_0$  ، أو

$$W = y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0) \neq 0 \quad (4)$$

ومن ذلك نستنتج أن المعادلتين الآتيتين

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = \phi(x_0)$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = \phi'(x_0)$$

لها حل وحيد هو  $c_1 = c_1^*, c_2 = c_2^*$  ، أي أن

$$c_1^* y_1(x_0) + c_2^* y_2(x_0) = \phi(x_0)$$

$$c_1^* y_1'(x_0) + c_2^* y_2'(x_0) = \phi'(x_0)$$

لننظر الآن إلى المعادلة

$$f = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 \quad (5)$$

حيث أن  $f$  مكونة من تشكيل خطي من حلين للمعادلة (3) على الفترة  $(a, b)$  ، فهي لا بد أن تكون كذلك حلا على نفس الفترة . وبالإضافة

$$f(x_0) = c_1^* y_1(x_0) + c_2^* y_2(x_0)$$

$$f'(x_0) = c_1^* y_1'(x_0) + c_2^* y_2'(x_0)$$

ومنه نجد أن  $f(x_0) = \phi(x_0)$  وأن  $f'(x_0) = \phi'(x_0)$  . وطبقا لنظرية وحدانية الحل المذكورة في البند ٢-٥ ، فإن الدالتين  $f, \phi$  لا بد أن تكونا متطابقتين وتشلان نفس الحل ، أي أن

$$\phi = c_1^* y_1 + c_2^* y_2$$

وبهذا يكتمل برهان النظرية .

تعريف . بافتراض تحقق فروضيات نظرية ٤ ، فإننا نطلق على الدالة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية ( ١ ) حيث  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  ثوابت اختيارية .

ملحوظة . يجب على القارئ أن يلاحظ أن افتراضنا أن  $b_0(x) \neq 0$  على الفترة

$(a, b)$  ضروري . وللايضاح نضرب مثالا لذلك بمعالجة المعادلة الخطية التالية

$$x y' - 2y = 0$$

ذات الحل العام  $y = c x^2$  ، فالحل الخاص

$$y_1 = x^2 \text{ for } x \geq 0, \text{ and } y_1 = -4x^2 \text{ for } x < 0 \quad (6)$$

لا يُعتبر حالة خاصة من الحل العام  $y$  لأن أي حالة خاصة تقتضي قيمة واحدة ثابتة للثابت الاختياري  $c$  . لكن  $y_1$  يمكن اعتبارها حالة خاصة من الحل العام على أي فترة  $(a, b)$  بحيث  $b_0(x) = x \neq 0$  . وبالتالي فإن أي فترة تحقق هذا الشرط لا بد أن تكون برمتها على يمين الصفر أو على يساره ، ومن ثم فالثابت  $c$  إما أن يساوي 1 أو -4 . أما  $y_1$  كما هي معطاة في (6) فهي عبارة عن دالتين تم وصلهما عند نقطة الأصل ، وكل من هاتين الدالتين تمثل حلا خاصا مشتقا من الحل العام .

## ٥-٥ الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

نظرية ٥ . ليكن  $y_p$  ( المعرفة على الفترة  $(a, b)$  ) حلا خاصا للمعادلة التفاضلية

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = R(x) \quad (1)$$



ولتكن المجموعة  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  تمثل حولا مستقلة خطيا للمعادلة المتجانسة

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0 \quad (2)$$

عندها يجب أن يكون أي حل للمعادلة (1) على الصيغة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_p \quad (3)$$

حيث  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  مجموعة من الثوابت الاختيارية .

البرهان : لنفترض أن  $\phi(x)$  يمثل حلا للمعادلة (1) . بما أن كلا من  $\phi$  و  $y_p$  يمثل

حلا للمعادلة (1) ، فإن الفرق  $\phi - y_p$  يمثل حلا للمعادلة (2) . وبتطبيق نظرية ٤

نستنتج وجود ثوابت اختيارية مناسبة  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  بحيث أن

$$\phi - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

وبوضع  $y$  بدلا من  $\phi$  نحصل على (3) . وهذا هو المطلوب .

هذا ويطلق على  $y_p$  مسمى الحل الخاص the particular solution ، أما

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (4)$$

فتسمى الدالة المكملية the complementary function ، ذلك أنها تمثل الحل العام

للمعادلة المتجانسة (2) وليست حلا للمعادلة الأصلية (1) . وعلى هذا فإن الحل العام

للمعادلة (1) هو عبارة عن مجموع الحل الخاص والدالة المكملية ، أي أن

$$y = y_c + y_p \quad (5)$$

وأما المجموعة  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  كما جاءت في نظرية ٤ فيطلق عليها مجموعة

الحل الأساسية the fundamental solution set ، أي أنها مجموعة مستقلة خطيا

عندها يساوي رتبة المعادلة وكل منها يمثل حلا للمعادلة المتجانسة (2) .

مثال ١ . لو علمنا أن الدالة  $y_p(x) = x^2$  تمثل حلا خاصا للمعادلة التفاضلية

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 2x - 4 \quad (6)$$

على الفترة  $(-\infty, \infty)$  بينما تمثل كل من الدوال

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = e^{2x}$$

حلا للمعادلة المتجانسة المرتبطة بها . أوجد الحل العام للمعادلة (6) .

الحل : من السهل أن نثبت أن الدوال  $y_1, y_2, y_3$  مستقلة خطيا ، وحيث أن عددها يساوي رتبة المعادلة ( 6 ) ، فإن المجموعة  $\{y_1, y_2, y_3\}$  تمثل مجموعة الحل الأساسية للمعادلة (6) . ويتطابق نظرية \* يتضح لنا أن الحل العام هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + x^2$$

مثال ٢ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' = 2 \quad (7)$$

الحل : نلاحظ أولا أن الدالتين  $y_1 = 1$  ,  $y_2 = x$  مستقلتان خطيا على أي فترة وأن كلا منهما يمثل حلا للمعادلة المتجانسة  $y'' = 0$  . لذا فإن الدالة المكملة هي

$$y_c = c_1 + c_2 x$$

وكذلك فإن الدالة  $y_p(x) = x^2$  تعتبر حلا خاصا للمعادلة (7) لأن  $y_p = 2$  . ولذا فإن الحل العام للمعادلة (7) هو

$$y = c_1 + c_2 x + x^2$$

### تمارين

فيما يلي حدد فيما إذا كانت الدوال المعطاة تشكل مجموعة الحل الأساسية للمعادلة التفاضلية المعطاة معها في نفس التمرين ، وفي حالة الإيجاب أوجد الحل العام :

$$(1) \quad y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0; \quad \{e^{3x}, e^{-x}, e^{-4x}\}$$

$$(2) \quad y''' - y'' + 4y' - 4y = 0; \quad \{\cos 2x, \sin 2x, e^x\}$$

$$(3) \quad y^{(4)} - y = 0; \quad \{\cos x, 1, e^{-x}, e^x\}$$

$$(4) \quad y^{(4)} - y = 0; \quad \{\cos x, \sin x, e^{-x}, e^x\}$$

$$(5) \quad x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0; \quad x > 0, \quad \{x, x^3\}$$

$$(6) \quad t^3 \frac{d^3 x}{dt^3} - 3t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 6t \frac{dx}{dt} - 6x = 0; \quad t > 0, \quad \{t, t^2, t^3\}$$

فيما يلي من التمارين تُعطى المعادلة التفاضلية مع حلها الخاص  $y_p$  ، وكذلك مجموعة الحل الأساسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات العلاقة . اكتب الحل العام لكل معادلة ، ثم أوجد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية المعطاة :

$$(7) \quad y''' + y'' + 3y' - 5y = 2 + 6x - 5x^2; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -3, \\ y_p(x) = x^2; \quad \{e^x, e^{-x} \cos 2x, e^{-x} \sin 2x\}$$

$$(8) \quad x y''' - y'' = -2; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -y(1)/2, \quad y''(1) = -2y(1), \\ y_p(x) = x^2; \quad \{1, x, x^2\}$$

$$(9) \quad u^3 v''' + u v' - v = 3 - \ln u; \quad v(1) = v'(1) = 3, \quad v''(1) = 0, \\ v_p(u) = \ln u, \quad \{u, u \ln u, u (\ln u)^2\}$$

$$(10) \quad y^{(4)} + 4y = 5 \cos x; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = -2, \\ y_p(x) = \cos x; \quad \{e^x \cos x, e^x \sin x, e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x\}$$

## ٦-٥ المؤثر التفاضلي

إذا رمزنا بـ  $D$  لعملية الاشتقاق بالنسبة للمتغير  $x$ ، وإذا رمزنا بـ  $D^2$  لعملية الاشتقاق مرتين بالنسبة للمتغير  $x$  ، وإذا استمرينا على هذا المنوال فإن  $D^k$  ترمز للاشتقاق  $k$  من المرات ، أي أن

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}$$

ومن ثم يتلخص تأثير  $D^k$  على  $y$  في اشتقاقه بالنسبة للمتغير  $x$  عدد  $k$  مرة . هذا على إفتراض أن  $y$  قابلة للاشتقاق عدداً من المرات لا يقل عن  $k$  .

تعريف . يُوصف المقدار

$$A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n \quad (1)$$

بأنه مؤثر تفاضلي من الرتبة  $n$  . ويمكن تعريفه أيضاً بأنه ذلك المؤثر الذى يؤثر على المقدار  $y$  فيكون الناتج

$$Ay = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y \quad (2)$$

حيث  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  مجموعة من الثوابت الاختيارية .

ملحوظة . من الممكن أن تكون  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  دوالاً تابعة للمتغير  $x$  لكننا سنتناول هنا الحالات التي يكون فيها  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  ثوابت اختيارية فقط .

تعريف . يقال أن المؤثرين التفاضليين  $A, B$  متساويان ، ويرمز لذلك بالمعادلة  $A = B$  إذا وفقط إذا تساوى حاصل تأثير كل من  $A$  و  $B$  على أي دالة  $y$  . وبمعنى آخر لا بد أن يكون لدينا  $Ay = By$  لجميع الدوال  $y$  القابلة للاشتقاق لدرجة مساوية لرتب الاشتقاق في كل من  $A, B$  .

ويُعرف حاصل ضرب مؤثرين تفاضليين  $AB$  بأنه ذلك المؤثر التفاضلي الذي يؤدي إلى نفس المحصلة الناتجة من تأثير المؤثر التفاضلي  $B$  يعقبه المؤثر التفاضلي  $A$  . ويكتب ذلك رياضياً على النحو التالي

$$AB y = A(B y)$$

ملحوظة . بالنسبة للمؤثرات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  فإننا نحصل دوماً على النتيجة  $AB = BA$  ، وهي غير صحيحة دائماً عندما تكون المعاملات  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  متغيرة .

مثال ١ . إذا كان

$$A = D - 2 \quad , \quad B = 2D - 3$$

فإن

$$By = (2D - 3)y = 2 \frac{dy}{dx} - 3y$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}
 ABy &= A(By) = (D-2) \left( 2 \frac{dy}{dx} - 3y \right) \\
 &= 2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} + 6y \\
 &= 2 \frac{d^2y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 6y
 \end{aligned}$$

ومن ثم يكون لدينا

$$AB = 2D^2 - 7D + 6$$

أما

$$\begin{aligned}
 BAy &= B(Ay) = (2D-3) \left( \frac{dy}{dx} - 2y \right) \\
 &= 2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} + 6y \\
 &= (2D^2 - 7D + 6)y
 \end{aligned}$$

ومن ثم

$$BA = 2D^2 - 7D + 6 = AB$$

مثال ٢. إذا كان

$$H = 2D + x, \quad G = D - 2x$$

فإن

$$\begin{aligned}
 GHy &= (D-2x) \left( 2 \frac{dy}{dx} + xy \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \left( 2 \frac{dy}{dx} + xy \right) - 2x \left( 2 \frac{dy}{dx} + xy \right) \\
 &= 2 \frac{d^2y}{dx^2} + y + x \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx} - 2x^2y \\
 &= (2D^2 - xD - 2x^2 + 1)y
 \end{aligned}$$

لذا فإن

$$GH = 2D^2 - xD - 2x^2 + 1$$

وبالمقابل فإن

$$\begin{aligned}
 HGy &= (2D + x)(D - 2x)y = (2D + x)\left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right) \\
 &= 2D^2y - 4y - 2x Dy + x Dy - 2x^2y \\
 &= (2D^2 - x Dy - 2x^2 - 4)y
 \end{aligned}$$

ومن ثم

$$HG = 2D^2 - x Dy - 2x^2 - 4 \neq GH$$

ومن الواضح أن عدم المساواة بين حاصلتي الضرب ناجم عن إحتواء كل من المؤثرين  $G$  ,  $H$  على معاملات غير ثابتة .

وقبل أن ننتقل إلى البند التالي ، فإننا سنستعرض القوانين الأساسية للعمليات الجبرية بين المؤثرات التفاضلية . وليكن  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ثلاثة مؤثرات تفاضلية، ولتكن عمليتا الجمع والضرب كما عرفناها آنفا ، عندها تخضع المؤثرات التفاضلية للقوانين التالية :

$$(أ) \text{ قانون الجمع التبادلي : } A + B = B + A$$

$$(ب) \text{ قانون المشاركة الجمعي : } (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(ج) \text{ قانون المشاركة الضربي : } (AB)C = A(BC)$$

$$(د) \text{ قانون الضرب التوزيحي بالنسبة للجمع : } A(B + C) = AB + AC$$

$$(هـ) \text{ قانون الضرب التبادلي : } AB = BA$$

شرطية أن تكون كلٌ من  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ذات معاملات ثابتة لا متغيرة كما أشرنا إلى ذلك في الصفحتين السابقتين .

وهكذا فإن المؤثرات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة تخضع لجميع قوانين العمليات الجبرية التي تخضع لها كثيرات الحدود بالنسبة للجمع والضرب . أما بالنسبة للمؤثرات التفاضلية بصفة عامة فهي تخضع للقوانين الأربعة الأولى على أقل تقدير .

ويمكننا أن نجد حاصل جمع أو طرح مؤثرين تفاضليين دون الحاجة إلى دراسة تأثيرهما على متغير ما ، وإنما يكفي بجمع الحدود المتشابهة التي تحتوي على

نفس درجة التفاضل . فمثلا لو أن

$$A = 2D^3 - 3D^2 + D - 2$$

و

$$B = xD^3 + 2D^2 - x^2D + 1$$

فإن

$$A + B = (x + 2)D^3 - D^2 + (1 - x^2)D - 1$$

بينما

$$A - B = (2 - x)D^3 - 5D^2 + (1 + x^2)D - 3$$

ويمكن لنا أيضا أن نتعامل مع المؤثرات التفاضلية على أنها مؤثرات خطية ،  
فلو كان  $A$  مؤثرا تفاضليا ، وكانت  $c_1, c_2$  ثوابت اختيارية . وكانت  $f_1, f_2$   
دالتين في  $x$  قابلتين للاشتقاق عددا من المرات لا يقل عن رتبة  $A$  ، فإن

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$$

وملاحظة أخيرة بالنسبة للمؤثرات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة حيث  
أننا قد أشرنا إلى خضوعها لجميع القوانين الجبرية التي تخضع لها كثيرات الحدود  
بالنسبة للجمع والضرب . وبناءً على هذا فإنه بإمكاننا أن نطبق عليها جميع  
العمليات الجبرية البسيطة كالقسمة التحليلية مثلا ، وذلك لإختصار المؤثرات ذات  
المعاملات الثابتة .

### تمارين

أوجد حاصل الضرب في التمارين الخمسة التالية :

$$(1) (4D + 1)(D - 2)$$

$$(2) (3D - 1)(2D - 3)$$

$$(3) (D^2 - 1)(D + 2)$$

$$(4) (D - 1)^2(2D + 1)$$

$$(5) (D^2 - 3D + 2)(D - 1)$$

حلل كلا من المؤثرات التفاضلية التالية :

$$(6) 2D^2 + 3D - 2$$

$$(7) 2D^2 - 5D - 12$$

$$(8) D^3 - 21D + 20$$

$$(9) D^4 - 9D^2$$

$$(10) D^3 - 2D^2 - 5D + 6$$

$$(11) D^4 + D^3 - 2D^2 + 4D - 24$$

$$(12) D^3 - 4D^2 + 5D - 2$$

$$(13) D^4 - 2D^3 + 3D^2 - 4D + 2$$

$$(14) D^3 - 11D - 20$$

$$(15) 2D^4 + 11D^3 + 18D^2 + 4D - 8$$

$$(16) D^4 - 8D^2 - 9$$

$$(17) D^3 - 27$$

أوجد حاصل ضرب كلٍّ من التالي :

$$(18) (D - x)(D + x)$$

$$(19) (D + x)(D - x)$$

$$(20) D(xD - 1)$$

$$(21) (xD - 1)D$$

$$(22) (xD + 1)(xD - 1)$$

$$(23) (xD - 1)(xD + 2)$$

## ٧-٥ المزيد من المؤثر التفاضلي

تعريف. لتكن  $y = y(x)$  دالة قابلة للاشتقاق  $n$  من المرات على الأقل . وليكن

$$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n \quad (1)$$

مؤثرا تفاضليا يحقق المعادلة

$$f(D)y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = 0$$

عندها نقول بأن المؤثر التفاضلي  $f(D)$  يلاشي الدالة  $y$ .

مثال ١. إذا كانت  $y = k$  حيث  $k$  ثابت ، وكانت  $f(D) = D$  ، فإن  $Dk = 0$  ، وكذلك

$$D^2 x = D^3 x^2 = 0 \text{ وهكذا . وبصفة عامة فإن } D^n \text{ تلاشي كلا من الدوال}$$

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$$



ولهذا ( وحيث أن الاشتقاق عملية توزيعية ) ، فإن أي كثيرة حدود على الصورة

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

يمكن ملاحظاتها من طريق إيجاد مؤثر تفاضلي يلاشي العدد ذا الأس الأكبر لكثيرة الحدود .

أما إذا كانت  $y = e^{mx}$  وكانت  $f(D) = D^k$  حيث  $k$  عدد صحيح موجب ، فإن

$$f(D)y = D^k e^{mx} = m^k e^{mx} \quad (2)$$

ولذا يمكن بسهولة إيجاد تأثير أي مؤثر تفاضلي على  $e^{mx}$  فلو كانت  $f(D)$  معطاة بالمعادلة ( 1 ) أعلاه ، فإن

$$\begin{aligned} f(D) e^{mx} &= a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \dots + a_n e^{mx} \\ &= e^{mx} (a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_n) \end{aligned}$$

أي أن

$$f(D) e^{mx} = e^{mx} f(m) \quad (3)$$

ولو كانت  $m$  جذرا للمعادلة  $f(m) = 0$  لحصلنا بموجب المعادلة ( 3 ) على

$$f(D) e^{mx} = 0$$

ومن هنا نستنتج القاعدة التالية :

**القاعدة ١ .** لو كانت  $f(D)$  معطاة بالمعادلة ( 1 ) وكانت  $m$  جذرا للمعادلة  $f(m) = 0$  ، فإن  $f(D)$  تلاشي الدالة  $e^{mx}$  .

والآن لننظر إلى مدى تأثير المؤثر التفاضلي  $D - a$  على حامل ضرب الدالة

$e^{ax}$  في أي دالة  $y$  قابلة للاشتقاق حيث  $a$  ثابت اختياري

$$(D - a)(e^{ax} y) = D(e^{ax} y) - a e^{ax} y = e^{ax} Dy$$

وكذلك

$$(D - a)^2(e^{ax} y) = (D - a)(e^{ax} Dy) = e^{ax} D^2 y$$

وهكذا بتكرار هذه العملية نجد أن

$$(D-a)^n(e^{ax}y) = e^{ax}D^n y \quad (4)$$

ولأن المؤثرات التفاضلية تحقق خاصية الخطية linearity property ، وعندما تكون  $f(D)$  كثيرة حدود في  $D$  وذات معاملات ثابتة ، فإنه تكون لدينا القاعدة التالية :

القاعدة ٢ . ليكن  $a$  أي ثابت اختياري ، ولتكن  $f(D)$  مؤثراً تفاضلياً ذا معاملات ثابتة . ولتكن  $y$  دالة قابلة للاشتقاق عدة مرات لا يقل عن رتبة  $f(D)$  ، عندها يكون

$$f(D-a)[e^{ax}y] = e^{ax}f(D)y$$

مثال ٢ . لتكن

$$f(D) = 2D^2 - 5D + 2$$

يحل المعادلة

$$f(m) = 2m^2 - 5m + 2 = 0$$

أو

$$(2m-1)(m-2) = 0$$

نجد أن جذري المعادلة هما  $m = 1/2$  ,  $m = 2$  . وباستعمال القاعدة ١ يمكننا أن نقول إن :

$$f(D)e^{2x} = 0$$

وإن

$$f(D)e^{x/2} = 0$$

أي أن

$$y_1 = e^{2x} , y_2 = e^{x/2}$$

يشكلان حلين للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = (2D^2 - 5D + 2)y = 0$$

مثال ٢. اثبت أن

$$(D - m)^n (x^k e^{mx}) = 0 \quad (5)$$

حيث  $k$  عدد صحيح غير سالب وأقل من  $n$  .

الحل : بتطبيق القاعدة ٢ واختيار  $f(D) = D^n$  و  $y = x^k$  نحصل على

$$(D - m)^n (x^k e^{mx}) = e^{mx} D^n x^k = 0$$

لأن  $D^n x^k = 0$  لجميع قيم  $k$  غير السالبة والأقل من  $n$  .

هذا ويمكن اعتبار المعادلة (5) قاعدة *ثالثة* في هذا البند ، وتشكل هذه

المعادلة مع القاعدتين ١ ، ٢ ركيزة أساسية هامة يُعتمد عليها إلى حد كبير في مياغة طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ، والتي سندرسها بشيء من التفصيل في الباب القادم إن شاء الله .

مثال ٤ . في هذا المثال البسيط نستعرض أهمية قاعدة الإزاحة الأسية (قاعدة ٢) في حل بعض المعادلات التفاضلية دونما كبير عناء . لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية

$$(D - 2)^3 y = 0 \quad (6)$$

لوهربنا المعادلة في المقدار  $e^{-2x}$  لصلنا على

$$e^{-2x} (D - 2)^3 y = 0$$

وبتطبيق القاعدة ٢ حيث  $a = -2$  ،  $f(D) = (D - 2)^3$  ، ومن ثم  $f(D - a) = D^3$  ، ومن ثم نحصل على

$$0 = e^{-2x} (D - 2)^3 y = D^3 (e^{2x} y)$$

أو

$$D^3 (e^{2x} y) = 0 \quad (7)$$

ثم تكامل المعادلة ثلاث مرات لنصل إلى

$$e^{-2x} y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

وبالضرب في  $e^{2x}$  نصل إلى الحل النهائي العام

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$$

مع ملاحظة أن كلا من الدوال  $e^{2x}$ ,  $x e^{2x}$ ,  $x^2 e^{2x}$  يمثل حلا للمعادلة (6) وذلك بتطبيق القاعدة ٢ والتي تمثلها المعادلة (5). أما الاستقلال الخطي فبرهانه متروك للقارئ (أنظر تمرين ١ بند ٥-٢).

### تمارين

فيما يلي استعمل القاعدة ٢ كما فعلنا في المثال الأخير لإيجاد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) (D - 1)^2 y = 0$$

$$(2) (D + 3)^4 y = 0$$

$$(3) (2D - 3)^3 y = 0$$

$$(4) (D + 2)^5 y = 0$$

$$(5) (3D + 2)^6 y = 0$$

$$(6) (D - 4)y = 0$$

(٧) اثبت أن المجموعة

$$\{e^{ax}, x e^{ax}, x^2 e^{ax}, \dots, x^{n-1} e^{ax}\}$$

مستقلة خطيا على أي فترة كانت ، وأوجد قيمة الرونسكيان  $W$ .

### ٨-٥ ملخص الباب

قد لا يجانبنا الصواب إن قلنا إن هذا الباب لم يقدم الشيء الكثير نحو معالجة فعليا لأنواع جديدة من المعادلات التفاضلية وإيجاد حلولها كما كان الحال في البابين الثاني والرابع . ولكن الواقع أن هذا الباب قدم أسما كثيرة وركائز هامة ننطلق منها نحو الأبواب القادمة ، وفي جمعيتنا الحصيلة الكافية والتنظير اللازم الضروريان لبناء استيعاب كامل ومتكامل لما ستعرضه البندود القادمة من طرق لحل المعادلات التفاضلية الخطية .

هذا ويمكننا أن نعتبر هذا الباب مساندا للأبواب القادمة وموئنا لها بالنظرية اللازمة ، كما يمكن تلخيص هذا الباب على النحو التالي :

أولاً : أي تشكيل خطي من حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة يشكل حلاً للمعادلة نفسها .

ثانياً: إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = R$$

فإن نظرية وجود الحل ووحدانيته تؤكد وجود حل وحيد في ظل الفرضيات التي تضعها النظرية كما جاءت في البند ٥-٢ . وهذا الحل يحقق الشروط الابتدائية التالية عند النقطة  $x_0$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

ثالثاً : في نفس البند ٥-٢ تم تعريف الاستقلال الخطي وعكسه لمجموعة من الدوال المعرفة على فترة معينة . وفي البند الذي يليه تم تعريف مقدار مرتبط بهذه المجموعة يُسمى الرونسكيان نسبة للعالم البولندي رونسكي .

رابعاً : إذا علمنا مجموعة من حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة

$$y^{(n-1)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = 0$$

فإنه بإمكاننا أن نستدل على الاستقلالية الخطية لهذه الحلول إذا كان الرونسكيان التابع لها يختلف عن الصفر ، وذلك بعد تحقق بقية الشروط الأخرى ( انظر نظرية ٢ وكذلك نظرية ٢ ) .

خامساً : من أهم نتائج البند الرابع من هذا الباب تلك المتعلقة بصيغة الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ، والتي تنص على أنه إذا كانت المجموعة

$$\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n\}$$

$$b_0 y^n + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0$$

حيث جميع الدوال  $b_i$  معرفة على الفترة  $(a, b)$  ومتصلة عليها أيضاً إضافة إلى كون  $b_0 \neq 0$  لا تساوي الصفر لأي قيمة في الفترة  $(a, b)$ ، فإن الحل العام عندئذ يكون

على النحو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

حيث  $\{c_1, \dots, c_n\}$  ثوابت اختيارية (أنظر نظرية ٤) .

ساسا : لو كانت  $b_k$  كما هي معرفة أعلاه ، و كانت  $y_p$  حلا للمعادلة التفاضلية

$$h_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = R$$

لكان الحل العام على النحو

$$y = y_c + y_p$$

حيث

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

هذا وقد أسمينا  $y_c$  الدالة المكتملة بينما أسمينا  $y_p$  الحل الخاص (نظرية ٥) .

سابقا : درسنا في البند السادس مصطلح المؤثر التفاضلي كما درسنا بعض القوانين الجبرية التي تربط بين المؤثرات التفاضلية . وفي البند الذى يليه استعرضنا ثلاث قواعد رئيسية تربط بين المؤثرات التفاضلية والدوال الاسية وأشرنا إلى مدى أهميتها بالنسبة لما سيليهها من أبواب تتناول طرقا جديدة لحل بعض أنواع المعادلات التفاضلية .

## الباب السّاوي

### المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

■ مقدمة ■ المعادلة المساعدة : تعريفها وأهميتها ■ المعادلة المساعدة ذات الجذور  
المختلفة ■ المعادلة المساعدة ذات الجذور المكررة ■ المعادلة للمساعدة ذات الجذور  
المركبة ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .





## ١-٦ مقدمة

في هذا الباب سنستعرض عدة طرق تقليدية لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة . وحتى نعطي القارئ صورة مبسطة لما سيلقي هذه المقدمة من مادة ، فسنبدأ بمعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ، ولتكن هذه المعادلة على الصورة التالية :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

حيث  $a, b, c$  ثوابت حقيقية و  $a \neq 0$  . وحيث أن هذه الثوابت تُعد دوالاً متصلة على أي فترة ، فبإمكاننا تطبيق نظريات الباب السابق لنستدل على ضرورة وجود حلول للمعادلة (1) لجميع قيم  $x$  الحقيقية . ولو أمكننا إيجاد حلين مستقلين خطياً للمعادلة (1) ولنرمز لهما بالرمزين  $y_1, y_2$  ، فعندئذ يمكن القول بأن الحل العام للمعادلة يجب أن يكون على الشكل

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حيث  $c_1, c_2$  ثوابت اختيارية .

وبالقاء نظرة فاحصة على المعادلة (1) يتبين لنا أن أي حل لها يجب أن يستوفي الخاصية التالية : حاصل ضرب المقدار الثابت  $a$  في الاشتقاق الثاني للحل مضافاً إليه المقدار الثابت  $b$  في الاشتقاق الأول للحل زائداً المقدار الثابت  $c$  في الحل نفسه يساوي صفراً . هذه الخاصية تدفعنا إلى اقتراح حل من النوع  $y = e^{ax}$  لأن أي اشتقاق لهذا النوع من الدوال يساوي مقدارا ثابتا في الدالة نفسها . وإذا ما جربنا هذا الاقتراح وذلك بالتعويض في المعادلة (1) فسنحصل على

$$a \alpha^2 e^{\alpha x} + b \alpha e^{\alpha x} + c e^{\alpha x} = 0$$

أو

$$e^{\alpha x} (a \alpha^2 + b \alpha + c) = 0$$

وحيث أن  $e^{\alpha x}$  لا تساوي الصفر أبداً ، فإنه يمكن القسمة عليها لتتوصل إلى

$$a \alpha^2 + b \alpha + c = 0 \quad (2)$$

ومن ثم نستنتج أن  $y = e^{\alpha x}$  يمثل حلاً للمعادلة (1) إذا وفقط إذا حققت  $\alpha$  المعادلة (2) والتي تطلق عليها المعادلة المساعدة لأنها تساعد حقيقة في إيجاد الحل المناسب.

## ٢-٦ المعادلة المساعدة : تعريفها وأهميتها

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0 \quad (1)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل المختصر

$$f(D)y = 0 \quad (2)$$

حيث  $f(D)$  يعثل مؤثراً تفاضلياً خطياً . وكما علمنا من القاعدة ١ في البند ٦-٥ ،

فإنه إذا كانت  $m$  جذراً للمعادلة  $f(m) = 0$  ، فإن

$$f(D) e^{mx} = 0$$

وهذا يعني بوضوح أن الدالة  $y = e^{mx}$  تعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية (2) .

تعريف. المعادلة المساعدة المرتبطة بالمعادلة (1) أو (2) هي

$$f(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0 \quad (3)$$

وهي معادلة من الدرجة  $n$  لأن  $a_0 \neq 0$  .

ولأن الدالة  $f(m)$  في (3) عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة  $n$  ، فلا بد أن يكون لهذه المعادلة  $n$  من الجذور . وهذه الجذور قد تكون حقيقية أو قد تكون مركبة ، ومنها ما يكون مختلفاً أو قد يكون مكرراً .

وسنعالج في البنود الثلاثة القادمة هذه الحالات المختلفة ، كما سنرى كيف تختزل عملية إيجاد حل للمعادلة ( 1 ) التي تبدو معقدة وصعبة إلى عملية جبرية محضة تتلخص في إيجاد جذور المعادلة ( 3 ) بالطرق المختلفة التي تعلمها من مواد رياضية سابقة .

### ٣-٦ المعادلة المساعدة ذات الجذور المختلفة

إذا كانت المعادلة المساعدة

$$f(m) = 0$$

ذات جذور حقيقية مختلفة ، ولتكن  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ، فإن مجموعة الدوال

$$y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x}, \dots, y_n = e^{m_n x}$$

تمثل حلولاً مستقلة خطياً للمعادلة  $f(D)y = 0$  ، ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

حيث  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ثوابت اختيارية ،

مثال ١ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 5y' - 6y = 0 \quad (1)$$

الحل : المعادلة المساعدة المرتبطة بالمعادلة ( 1 ) هي

$$m^2 + 5m - 6 = 0$$

أو

$$(m - 1)(m + 6) = 0$$

ومنها يكون للمعادلة جذران هما  $m = 1$  ،  $m = -6$  . وبالتالي فالحل العام هو

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-6x}$$

مثال ٢ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (2)$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة ( 2 ) في الصورة  $f(D)y = 0$  ، أي على النحو

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$$

ومنه نحصل على المعادلة المساعدة

$$m^3 - m^2 - 4m + 4 = 0$$

وباختبار المعادلة نجد أن  $m_1 = 1$  يحقق المعادلة ، أي أنه جذر لها وذلك يعني أن

$f(m)$  قابلة للقسمة على  $m - 1$  ، وبإجراء القسمة العادية الكسرية

نحصل على

$$\begin{aligned} f(m) &= (m - 1)(m^2 - 4) \\ &= (m - 1)(m - 2)(m + 2) \end{aligned}$$

وبالتالي يكون للمعادلة المساعدة جذران آخران هما  $m_2 = 2$  ،  $m_3 = -2$  ، ولذا

فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال ٣. أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 2D - 3)y = 0$$

الذي يحقق الشرطين الابتدائيين  $y(0) = 0$  ،  $y'(0) = -4$  .

الحل : باستخدام المعادلة المساعدة نجد أن الحل العام هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

وبإجراء الاشتقاق الأول

$$y' = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x}$$

وبالتعويض في هاتين المعادلتين عندما  $x = 0$  نجد أن

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y'(0) = -c_1 + 3c_2 = -4$$

ومنه نحصل على الحل الآتي  $c_1 = 1$  ،  $c_2 = -1$  ، وبالتالي فالحل المطلوب هو

$$y = e^{-x} - e^{3x}$$

## تمارين

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad (D^2 - D - 2)y = 0$$

$$(2) \quad (D^2 + 4D + 3)y = 0$$

$$(3) \quad y'' - 3y' - 10y = 0$$

$$(4) \quad (D^2 + D - 6)y = 0$$

$$(5) \quad y''' + 2y'' - 8y = 0$$

$$(6) \quad (D^3 - 8D^2 + 15D)y = 0$$

$$(7) \quad (D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$$

$$(8) \quad (D^3 + D^2 - 9D + 9)y = 0$$

$$(9) \quad (4D^3 - 13D + 6)y = 0$$

$$(10) \quad (6D^3 + 11D^2 - 12D - 5)y = 0$$

$$(11) \quad y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

$$(12) \quad 4y''' - 49y' - 60y = 0$$

$$(13) \quad (4D^3 - 15D^2 + 5D + 6)y = 0$$

$$(14) \quad (D^4 + 2D^3 - 13D^2 + 38D - 24)y = 0$$

$$(15) \quad (6D^4 + 23D^3 + 28D^2 + 13D + 2)y = 0$$

$$(16) \quad (4D^4 + 45D^2 - 70D - 24)y = 0$$

$$(17) \quad (6D^5 - 3D^4 - 5D^3 - 15D^2 - 4D - 12)y = 0$$

$$(18) \quad [D^2 - (a+b)D + ab]y = 0$$

حيث  $a, b$  ثابتان حقيقيان غير متساويين  
فيما يلي أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية المعطاة لكل من المعادلات

التفاضلية التالية :

$$(19) \quad (D^2 - D - 6)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^3$$

$$(20) \quad (D^2 - 2D - 3)y = 0; \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$$

$$(21) \quad (D^3 - 4D)y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$$

$$(22) \quad y'' + 2y' - y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

$$(23) \quad (D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -7, \quad y''(0) = -1$$

## ٤-٦ المعادلة المساعدة ذات الجذور المكررة

لنبدأ مرة أخرى بالمعادلة

$$f(D)y = 0 \quad (1)$$

ولنفترض أن تحليل  $f(D)$  إلى عوامله الأولية أنتج لنا عاملاً مكرراً ، أي أن المعادلة المساعدة  $f(m) = 0$  لديها جذر مكرر أكثر من مرة ، وليكن هذا الجذر  $\alpha$  . ولنقل جدلاً أنه مكرر مرتين ، أي أن  $m_1 = m_2 = \alpha$  ، وأنهما الجذران الوحيدان للمعادلة المساعدة ، بمعنى أن  $f(m) = 0$  معادلة من الدرجة الثانية على الهيئة

$$k(m - \alpha)^2 = 0$$

حيث  $k$  أي ثابت اختياري . لو أردنا أن نطبق طريقة البند السابق لقلنا فوراً إن الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$$

ولكن  $c_1, c_2$  ثابتان اختياريان ينتج من جمعهما ثابت اختياري جديد هو  $c$  .

$$y = (c_1 + c_2) e^{\alpha x} = c e^{\alpha x}$$

وبالتالي يكون لدينا حل واحد فقط مقابل جذرين للمعادلة المساعدة ، وهذا يعني تماماً أن الحلين الناتجين من الجذرين المكررين غير مستقلين خطياً ، وهو ما يجب أن نتفاداه لأننا نعلم أنه يجب أن يكون لدينا حلان مستقلان خطياً .

إذا نحن نسعى في هذه الحالة إلى البحث عن طريقة تضمن لنا الحصول على  $n$  من الحلول المستقلة خطياً عندما يكون للمعادلة المساعدة جذر حقيقي  $\alpha$  تكرر عدد  $j$  من المرات حيث  $j \leq n$  . ولتكن

$$m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha$$

عندها سيكون  $(m - \alpha)^j$  أحد عوامل  $f(m)$  ، وبالتالي  $(D - \alpha)^j$  أحد عوامل المؤثر التفاضلي  $f(D)$  . المطلوب الآن أن نجد  $j$  من الحلول المختلفة  $\{y_1, y_2, \dots, y_j\}$

المستقلة خطيا بحيث يتحقق لدينا

$$(D - \alpha)^j y_k = 0 \quad (2)$$

حيث  $k = 1, 2, \dots, j$ .

ولنعد بالصفحات قليلا إلى الخلف إلى المعادلة (5) من البند ٧-٥ والتي تمثل

القاعدة الثالثة من قواعد ذلك البند ، وبحل  $\alpha$  محل الجذر المتكرر  $m$  نجد

$$(D - \alpha)^j (x^k e^{\alpha x}) = 0 \quad (3)$$

حيث  $k = 0, 1, \dots, j-1$  ، ويبدو أننا قد حصلنا على هفيتنا من المعادلة فالذوال

$$y_{k+1} = x^k e^{\alpha x}$$

حيث  $k = 0, 1, \dots, j-1$  والتي يبلغ عددها  $j$  مستقلة خطيا ( انظر تمرين ٧ في نفس البند ) وكل منها يمثل حلا للمعادلة (2) . وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} + \dots + c_j x^{j-1} e^{\alpha x} \quad (4)$$

ومن جهة أخرى لو كان  $(D - \alpha)^j$  عاملا من عوامل تحليل  $f(D)$  ، فإن المعادلة

$$f(D)y = 0 \quad (5)$$

يمكن إعادة كتابتها على الشكل

$$g(D)(D - \alpha)^j y = 0 \quad (6)$$

حيث تتكون  $g(D)$  من حاصل ضرب جميع العوامل الأولية للمؤثر  $f(D)$  عدا

$(D - \alpha)^j$  ، وفي هذه الحالة يكون أي حل للمعادلة

$$(D - \alpha)^j y = 0 \quad (2)$$

هو حل للمعادلة (6) ، وبالتالي يكون حلا للمعادلة (5) التي ابتدأنا بها أصلا .

وهكذا ، وبنهاية هذا النقاش نكون قد وصلنا إلى مرحلة تسمح لنا بكتابة

الحل العام للمعادلة (1)

$$f(D)y = 0$$

طالما كان للمعادلة المساعدة  $f(m) = 0$  جذور حقيقية بغض النظر عن اختلافها أو

تكرارها ، ذلك أن أي جذر للمعادلة المساعدة إما أن يكون مختلفا عن جميع الجذور

الأخرى أو يكون عنصرا في مجموعة من الجذور المتكررة . فعندما يكون الجذر

مختلفا من بقية الجذور الأخرى ، وليكن هذا الجذر  $m_1$  ، فإن هناك حلا مرتبطا به ومستقلا خطيا عن بقية الحلول الأخرى ، ولنرمز له بالرمز  $y_1$  حيث

$$y_1 = c_1 e^{m_1 x}$$

أما عندما يكون لدينا  $j$  من الجذور المتساوية

$$m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha , (j \leq n)$$

فإن مجموعة الحلول

$$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{j-1} e^{\alpha x}$$

تمتاز باستقلالها الخطي ويتساويها في العدد مع عدد مرات تكرار الجذر  $\alpha$  . ومن ثم يكون لدينا حل مستقل مقابل كل جذر من جذور المعادلة المساعدة سواء كان الجذر مختلفا أو متكررا .

مثال ١ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''' + 3y'' - 4y = 0 \quad (7)$$

الحل : نكتب المعادلة المساعدة

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0$$

فنجد أن  $m_1 = 1$  هو أحد جذورها ، ويقسمه  $f(m)$  على العامل الأولي  $m - 1$  نجد أن

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m + 2)^2$$

أي أن للمعادلة المساعدة جذران متساويان أو جذر متكرر هو  $-2$  . وبتلخيص الوضح لمزيد من الترتيب والوضوح نكتب الجذور على النحو التالي :

$$m_1 = 1, m_2 = m_3 = -2$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (7) هو

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$$

مثال ٢ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^5 - 16D^3)y = 0$$



الحل : نكتب المعادلة المساعدة

$$m^5 - 16m^3 = m^3(m^2 - 16) = 0$$

والتي لها الجذور الخمسة

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0, \quad m_4 = 4, \quad m_5 = -4$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{4x} + c_5 e^{-4x}$$

### تمارين

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

- (1)  $(D^2 - 2D + 1)y = 0$
- (2)  $4y'' - 4y' + y = 0$
- (3)  $(D^3 + 6D^2 + 9D)y = 0$
- (4)  $(9D^3 + 6D^2 + D)y = 0$
- (5)  $(2D^4 - 3D^3 - 2D^2)y = 0$
- (6)  $(D^4 - 2D^2 + 1)y = 0$
- (7)  $y''' + 3y'' - 4y = 0$
- (8)  $(D^3 - 4D^2 + 3D - 1)y = 0$
- (9)  $(D^5 - 25D^3)y = 0$
- (10)  $(4D^4 + 4D^3 - 3D^2 - 2D + 1)y = 0$
- (11)  $(4D^4 - 4D^3 - 23D^2 + 12D + 36)y = 0$
- (12)  $(D^5 + 5D^4 - 2D^3 - 10D^2 + D + 5)y = 0$
- (13)  $(D^4 - 5D^2 - 6D - 2)y = 0$

فيما يلي أوجد الحل الخاص الذي يحقق شروط المسألة الابتدائية :

- (14)  $y'' + 6y' + 5y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
- (15)  $y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
- (16)  $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

$$(17) \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y(2) = 0$$

$$(18) \quad y''' + 12y'' + 36y' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -7$$

$$(19) \quad (D^4 + 3D^3 + 2D^2)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -5, \quad y'''(0) = 9$$

$$(20) \quad (D^4 - 3D^3 + 3D^2 - D)y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1$$

فيما يلي أوجد قيمة  $y$  عندما  $x = 2$

$$(21) \quad (4D^2 - 4D + 1)y = 0; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$$

$$(22) \quad (D^3 + 2D^2)y = 0; \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 12$$

## ٦-٥ المعادلة المساعدة ذات الجذور المركبة

تناولنا في البندين السابقين المعادلة التفاضلية

$$f(D)y = 0 \quad (1)$$

عندما تكون المعادلة المساعدة المرتبطة بها ذات جذور حقيقية سواء كانت مختلفة أو مكررة . وفي هذا البند سنتناول الحالة الوحيدة المتبقية ، وهي التي تشمل الجذور المركبة للمعادلة المساعدة . وقد لا يكون الاختلاف كبيراً هنا ، وإنما ينحصر الاختلاف في تعريف الدالة الأسية  $e^z$  عندما يكون  $z$  عدداً مركباً . ولذا وجب أن نبدأ بإزالة هذا الغموض النسبي في تعريف  $e^z$  . ولتكن  $z = \alpha + i\beta$  حيث  $\alpha$  ،  $\beta$  عدنان حقيقيان و  $i$  كما هو معروف تمثل الجذر التربيعي للمقدار  $-1$  ، وبالتالي فإن

$$e^z = e^{\alpha + i\beta} = e^\alpha e^{i\beta} \quad (2)$$

حيث  $e^\alpha$  عدد حقيقي يساوي مقدار الدالة الأسية عندما  $x = \alpha$  . وبصورة أكثر تحديداً نحن نعلم أن

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

أو

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3)$$

ومن ثم

$$e^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \quad (4)$$

ولنعالجنا  $e^{i\beta}$  بنفس الطريقة لوجدنا أن

$$e^{i\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!} = 1 + \frac{i\beta}{1!} + \frac{i^2\beta^2}{2!} + \dots + \frac{i^n\beta^n}{n!} + \dots \quad (5)$$

لكننا ندرك أن

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

ومن ثم تتكرر الدورة بانتظام

$$i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1, \dots$$

وعموماً فإن  $i^{2k} = (-1)^k$  بينما  $i^{2k+1} = (-1)^k i$  . وبتطبيق هذه القاعدة علىالمعادلة (5) واسترجاع التعريف الخاص بكل من  $\sin \beta$ ,  $\cos \beta$  كمتسلسلة أسية

نجد أن

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta \quad (6)$$

هذا ويمكن للقارئ الرجوع إلى Rainville صفحة ١٠٧ لمزيد من التفاصيل .

وعوداً إلى المعادلة (2) واستناداً إلى المعادلة (6) يتبين لنا أن

$$e^x = e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} \quad (7)$$

$$= e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

حيث  $\alpha, \beta$  أعداد حقيقية . وباستبدال  $\beta$  بالمقدار  $-\beta$  . وتذكر أن

$$\cos(-\beta) = \cos \beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

نصل إلى أن

$$e^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta - i \sin \beta) \quad (8)$$

لنفترض الآن أن

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x}$$

حيث  $\alpha, \beta, x$  أعداد حقيقية . عندها سنجد أن

$$(D - (\alpha + i\beta))y = 0 \quad (9)$$

ذلك لأن

$$Dy = \frac{dy}{dx} = (\alpha + i\beta)y$$

وهو ما يحقق المعادلة (9) . وكذلك الحال مع الدالة

$$y = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

التي تحقق المعادلة

$$(D - (\alpha - i\beta))y = 0 \quad (10)$$

أما الآن فنعود لموضوعنا الرئيسي ، ولنتناول المعادلة التفاضلية

$$f(D)y = 0 \quad (1)$$

والتي ترتبط بها معادلة مساعدة ذات معاملات حقيقية فقط . ففي هذه الحالة نعلم ما تعلمناه من مبادئ علم الجبر أن الجذور المركبة لهذه المعادلة لا بد أن تأتي مترافقة ، أي أنه إذا كان

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

جذرا للمعادلة المساعدة  $f(m) = 0$  حيث  $\alpha, \beta$  حقيقيان و  $\beta \neq 0$  ، فإن

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

لا بد أن يكون هو الآخر جذرا لنفس المعادلة . هذا ويسمى  $m_2$  المرافق لـ  $m_1$  ، ولا بد لنا أن نتذكر أن هذه القاعدة صحيحة نتيجة لاشتراطنا أن تكون المعاملات الثابتة في المعادلة  $f(m) = 0$  كلها حقيقية . أما إذا كانت بعض المعاملات مركبة فلا يشترط أن تكون الجذور المركبة مترافقة .

ولنقم الآن بكتابة حلول المعادلة (1) المرتبطة بالجذور المركبة للمعادلة  $f(m) = 0$  ذات المعاملات الحقيقية فقط . وليكن للمعادلة  $f(m) = 0$  الجذران المترافقان

$$m_1 = \alpha + i\beta, \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

مندها وطبقا للمعادلتين (9)، (10) يمكننا القول بأن الدالة

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (11)$$

تحقق المعادلة (1) وحيث أن  $x$  وكذلك  $\alpha, \beta$  كلها حقيقية فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلة (11) على الصورة

$$y = c_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$y = (c_1 + c_2) e^{\alpha x} \cos \beta x + i(c_1 - c_2) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

وبوضع

$$c_1 + c_2 = c_3, \quad i(c_1 - c_2) = c_4$$

يمكننا كتابة الدالة  $y$  في الصورة

$$y = c_3 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_4 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

حيث  $c_3, c_4$  ثوابت اختيارية .

قاعدة . لتكن  $f(m) = 0$  المعادلة المساعدة للمعادلة التفاضلية (1) . ولتكن  $f(m)$  ذات معاملات حقيقية فقط . لو افترضنا أن  $m_1 = \alpha + i\beta$  حيث  $\beta \neq 0$  يمثل جذرا للمعادلة  $f(m) = 0$  ، فإن المرافق  $m_2 = \alpha - i\beta$  يمثل جذرا آخر للمعادلة نفسها .  
(أما حل المعادلة (1) المرتبط بهذين الجذرين المركبين فهو

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (12)$$

مثال ١ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(3D^3 - 19D^2 + 36D - 10)y = 0$$

الحل : من السهل التحقق من أن  $m_1 = \frac{1}{3}$  جذر حقيقي للمعادلة المساعدة

$$f(m) = 3m^3 - 19m^2 + 36m - 10 = 0$$

وبالقسمه التحليلية نجد أن

$$\begin{aligned} f(m) &= \left(m - \frac{1}{3}\right) (3m^2 - 18m + 30) \\ &= (3m - 1)(m^2 - 6m + 10) \end{aligned}$$

وباستعمال القانون نجد أن الجذرين الآخرين هما

$$m_2 = 3 + i, \quad m_3 = 3 - i$$

وبالتالي فالحل العام هو

$$y = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{3x} \cos x + c_3 e^{3x} \sin x$$

**ملاحظة.** الجذور المركبة المكررة تفضي إلى حلول تشبه تلك التي تفضي إليها الجذور الحقيقية المكررة . فمثلا لو أن الجذرين المركبين

$$m_1 = \alpha + i\beta, \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

تكرر ظهورهما مرة أخرى ، فمعدها يكون لدينا أربعة حلول خطية مستقلة تكون في مجموعها الحل

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x} \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

**مثال ٢.** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4 + 6D^2 + 9)y = 0$$

**الحل :** نكتب أولا المعادلة المساعدة

$$f(m) = m^4 + 6m^2 + 9 = 0$$

أو

$$(m^2 + 3)^2 = 0$$

ومن هنا نجد الجذور المركبة الأربعة  $\pm \sqrt{3}i$  ,  $\pm \sqrt{3}i$  أي أن كلا من الجذرين  $m_1 = \sqrt{3}i$  و  $m_2 = -\sqrt{3}i$  قد تكرر ظهوره مرة أخرى ، وحيث أن الجزء الحقيقي

$\alpha$  مساو للصفر ، وبالتالي  $e^{\alpha x} = 1$  ، فإن الحل العام للمعادلة هو

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos \sqrt{3} x + (c_3 + c_4 x) \sin \sqrt{3} x$$

## تمارين

فيما يلي أوجد حلول كل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) (D^2 - 2D + 5)y = 0$$

$$(2) (D^2 + 1)y = 0$$

$$(3) y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$(4) (D^2 - 6D + 10)y = 0$$

$$(5) (D^2 - 4D + 7)y = 0$$

$$(6) 3y'' + 2y' + y = 0$$

$$(7) y'' + 4y' + 6y = 0$$

$$(8) y''' - y = 0$$

$$(9) (D^3 + D^2 - 2)y = 0$$

$$(10) (D^4 + D^3 + D^2)y = 0$$

$$(11) (D^4 + 2D^3 + 10D^2)y = 0$$

$$(12) (D^5 - 16D)y = 0$$

$$(13) (D^5 + D^4 - 7D^3 - 11D^2 - 8D - 12)y = 0$$

$$(14) (D^4 + 18D^2 + 81)y = 0$$

$$(15) (D^6 + 9D^4 + 24D^2 + 16)y = 0$$

فيما يلي أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشروط الابتدائية المعطاة :

$$(16) y'' + 16y = 0; y(0) = 2, y'(0) = -y(0)$$

$$(17) y'' + 2y' + 2y = 0; y(0) = 2, y'(0) = y(0)/2$$

$$(18) y'' - 2y' + 2y = 0; y(\pi) = e^\pi, y'(\pi) = 0$$

$$(19) y''' + y'' + 4y' + 4y = 0; y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 5$$

$$(20) y''' - 8y = 0; y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 0$$

## ٦-٦ ملخص الباب

هذا الباب احتوى على خمسة بنود إضافة إلى هذا الملخص . وكما أشرنا في ملخص الباب الخامس ، فإن هذا الباب هو إنطلاقة حقيقية نحو ممارسة فعلية لإيجاد حلول المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة ، وذلك بتفسير ماتعلمناه في البند الخامس الذي شكل وأرسى القواعد الأساسية لانطلاقة هذا الباب .

وكان البند الأول مقدمة مهدت للبند الثاني الذي ركز على تعريف المعادلة المساعدة والدور الهام الذي تلعبه هذه المعادلة نحو إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة . وقد تمت دراسة الحالات المختلفة لجذور هذه المعادلة في البنود الثلاثة التالية . وفيما يلي نعطي ملخصاً موجزاً لما تناوله هذا الباب :

أولاً : تناول هذا الباب دراسة المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

حيث  $a_k$  ثابت حقيقي لجميع قيم  $k$  ابتداءً بالصفر وإنهاءً بـ  $n$  . ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة في هيئة مؤثر تفاضلي  $f(D)$  يؤثر على  $y$  ليكون الناتج صفراً

$$f(D)y = 0$$

أما المعادلة المساعدة فهي كثيرة حدود من الدرجة  $n$  في المتغير  $m$  ومساوية للصفر

$$f(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

حيث  $a_0 \neq 0$  .

ثانياً : للمعادلة المساعدة  $n$  من الجذور قد تكون حقيقية وقد تكون مركبة ، ويرتبط بهذه الجذور  $n$  من الحلول المستقلة خطياً ، وذلك على النحو التالي :

١- إذا كان  $m_i$  جذراً حقيقياً مختلفاً عن بقية الجذور الأخرى ، فإن

$$y_i = e^{m_i x}$$

هو الحل المرتبط بهذا الجذر ، وهو حل مستقل خطياً عن سائر الحلول الأخرى .



ب - إذا كان هناك جذر متكرر  $j$  من المرات ، أي أن  $m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha$  ، فإن هناك  $j$  من الحلول المستقلة خطيا والمرتبطة بهذا الجذر المتكرر ، وهي

$$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{j-1} e^{\alpha x}$$

ج - أما إذا كان  $m_1 = \alpha + i\beta$  ،  $\beta \neq 0$  ، جذرا مركبا للمعادلة المساعدة فلا بد أن يكون مرافقه  $m_2 = \alpha - i\beta$  جذرا هو الآخر . وأما الحلان المستقلان خطيا والمرتبطان بهذين الجذرين المركبين فيشملهما الحل

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

د - في حالة تكرار الجذرين المركبين أكثر من مرة ، ولتكن  $j$  من المرات حيث  $2j \leq n$  ، أي في حالة كون

$$m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha + i\beta$$

وكذلك

$$m_{j+1} = m_{j+2} = \dots = m_{2j} = \alpha - i\beta$$

فإن الحلول المستقلة خطيا المرتبطة بهذه الجذور يشملها الحل

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + c_4 x e^{\alpha x} \sin \beta x + \dots + c_{2j-1} x^{j-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + c_{2j} x^{j-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

هـ - يُنصح دائما بالاستعانة بالأمثلة وحل التمارين المدرجة في نهاية كل بند حتى تتفصح الصورة وترسخ الفكرة في ذهن القارئ .

## ٧-٦ تعاريف عامة

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) (D^2 - 2D)y = 0$$

$$(2) (D^2 + D - 6)y = 0$$

$$(3) (4D^2 + 4D + 1)y = 0$$

- (4)  $(D^2 + 1)y = 0$
- (5)  $y'' - 9y' + 9 = 0$
- (6)  $3y'' + 4y' + 9y = 0$
- (7)  $(D^3 - D^2 + D + 3)y = 0$
- (8)  $(D^3 + 2D^2 + 5D - 26)y = 0$
- (9)  $(D^3 + 2D^2 - 3D)y = 0$
- (10)  $(D^3 - 3D^2 + 4)y = 0$
- (11)  $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0$
- (12)  $(4D^3 - 21D - 10)y = 0$
- (13)  $y''' + 3y'' - 4y' - 6y = 0$
- (14)  $y''' - y'' + 2y = 0$
- (15)  $(D^4 + 4D^2 + 4)y = 0$
- (16)  $(4D^3 - 7D + 3)y = 0$
- (17)  $(D - 1)^2(D + 3)(D^2 + 2D + 5)^2y = 0$
- (18)  $(D - 1)^3(D - 2)(D^2 + D + 1)(D^2 + 6D + 10)^3y = 0$
- (19)  $(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4)y = 0$
- (20)  $(D^4 - D^3 - 3D^2 + D + 2)y = 0$
- (21)  $(D^5 + D^4 - 9D^3 - 13D^2 + 8D + 12)y = 0$
- (22)  $(D^4 + 5D^2 + 4)y = 0$
- (23)  $(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0$
- (24)  $(4D^3 + 12D^2 + 13D + 10)y = 0$
- (25)  $(4D^3 + 28D^2 + 16D + 37)y = 0$

فيما يلي أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية المعطاة :

$$(26) \quad (D^2 - D - 6)y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

$$(27) \quad (D^3 + 6D^2 + 12D + 8)y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -y'(0)$$

$$(28) \quad y''' + 7y'' + 14y' + 8y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = 13$$

$$(29) \quad y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

$$(30) \quad y'' - 10y' + 25y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

$$(31) \quad y'' + 4y = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

$$(32) \quad (D^4 - 3D^3 + 3D^2 - D)y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1$$

$$(33) \quad (4D^2 + 20D + 25)y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$$(34) \quad (D^2 - D - 6)y = 0; \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 1$$

$$(35) \quad y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \pi^{-1}$$

$$(36) \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$$

$$(37) \quad (D^3 - 9D)y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$$



## الباب السابع

# المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

■ معلومة ■ إيجاد معادلة متجانسة بخطوية الحل الخاص ■ طريقة المعاملات غير  
المعينة ■ طريقة الضعفين وقاعدة التركيب ■ ملخص الباب .



## ١-٧ مقدمة

بعد أن تناولنا في الباب السابق المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة ، رأينا أنه بإمكاننا إيجاد حل أي معادلة منها عن طريق إيجاد جذور المعادلة المساعدة ، أي أننا اختزلنا عملية إيجاد حل المعادلة التفاضلية وقصرناها على عملية إيجاد جذور معادلة صفرية طرفها الأيسر كثيرة حدود من الدرجة  $n$  . والسؤال الطبيعي الذي يفرض نفسه هنا هو : كيف يمكننا أن ننطلق من هنا لإيجاد حل لنفس المعادلة التفاضلية التي يختلف طرفها الأيمن من الصفر ؟ ويمكننا إعادة صياغة السؤال بصورة رياضية أكثر شمولاً ووضوحاً فنقول : كيف نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة ؟ ولعل خير ما نبدأ به مشوار الجواب هو أن نكتب نص هذه المعادلة التفاضلية التي نسعى إلى حلها

$$(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_n) y = R(x) \quad (1)$$

ولر رجعنا إلى نظرية هـ في البند هـ-هـ لوجدنا أن إيجاد الحل العام يتكون من خطوتين :

الأولى : إيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_n) y = 0 \quad (2)$$

وهو ما يسمى بالدالة الكاملة  $y_c$  . وهذا ما تعلمناه جيداً من الباب السابق ويعتمد حله على إيجاد جذور المعادلة المساعدة كما أشرنا إلى ذلك آنفاً .  
الثانية : إيجاد حل خاص للمعادلة ( 1 ) وهو الحل الخالي من الثوابت الاختيارية والحقق للمعادلة ( 1 ) ، وهو ما يُرمز له بالرمز  $y_p$  .

وبعد إكمال هاتين الخطواتين ، نحصل على الحل العام للمعادلة (1) ، وهو

$$y = y_c + y_p$$

إذا نخلص إلى أن الأمر متوقف على إيجاد الحل الخاص للمعادلة (1) ، ولأن ذلك ليس سهلا بالضرورة ، فقد تم تخصيص هذا الباب ، والباب الذي يليه لدراسة هذا الموضوع .

## ٧-٢ إيجاد معادلة متجانسة بمعلومية الحل الخاص

لتكن الدالة  $g(x)$  حلا خاصا للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$f(D)y = 0 \quad (1)$$

حيث  $f(D)$  مؤثر تفاضلي ذو معاملات ثابتة نرغب في إيجاد بحيث يكون لدينا

$$f(D)g = 0 \quad (2)$$

ويبدو أنه يستحيل علينا أن نجد  $f(D)$  لو كانت  $g$  أي دالة مشوائية . أما عندما تكون  $g$  على صورة معينة فإنه يمكن إيجاد هذا المؤثر  $f(D)$  ، وعندها نقول إن  $g$  تمثل حلا خاصا للمعادلة (1) . فمثلا لو كانت  $g = k$  حيث  $k$  ثابت ، لاستنتجنا فوراً أن بإمكاننا اختيار  $f(D) = D$  . ولو كانت  $g = x$  أو  $g = x + 1$  لاخترنا  $f(D) = D^2$  . أما لو كانت  $g = e^x$  لاخترنا  $f(D) = D - 1$  لأننا تعلمنا من البند السابق أن المعادلة التفاضلية

$$(D - 1)y = 0 \quad (3)$$

لها حل عام هو

$$y = c e^x$$

ولو أخذنا  $c = 1$  لأدركنا أن  $g$  تحقق المعادلة (3) كما هو مطلوب .

وبصفة عامة لو كانت  $g$  مكونة من إحدى الدوال التالية :

١- ثابت  $k$  .

ب - كثيرة حدود في  $x$  .

ج - دالة أسية في صورة  $e^x$  .

د - الدالتين المثلثيتين  $\sin bx$  ،  $\cos bx$  .



أو أي عدد محدود من عمليات جمع أو ضرب هذه الدوال ، فإنه من الممكن دائماً أن نجد المؤثر التفاضلي الذي يلاشيها ، أي يؤثر عليها فيكون الناتج صفراً . ولعل من المناسب أن نزيد الأمر ونعنيها بالأمثلة التالية :

مثال ١ . أوجد معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة بحيث تكون الدالة

$$y = 3e^{-2x} - 5x$$

حلاً خاصاً لها .

الحل : نلاحظ أولاً أن معاملي المعدين وهما  $-5$  ،  $3$  لا تأثير لهما هنا طالما كانا مختلفين عن الصفر . فالواقع أننا نبحث عن معادلة تفاضلية تتحقق بالدالة  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x$  ، والتي تمثل مجموع الحلين  $y_2 = c_2 x$  ،  $y_1 = c_1 e^{-2x}$  ، فالحل الأول ناتج عن معادلة مساعدة جذرها يساوي  $-2$  . وهذه المعادلة هي

$$m - (-2) = m + 2$$

وهي مرتبطة بالمؤثر التفاضلي  $D + 2$  . أما الحل الثاني فناتج عن معادلة مساعدة ذات جذر مكرر هو الصفر ، وهي ببساطة المعادلة  $m^2 = 0$  ، والمرتبطة بالمؤثر

$$D^2 = 0 . \text{ ومن ثم فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي}$$

$$D^2(D + 2)y = 0$$

أو

$$(D^3 + 2D^2)y = 0 \quad (4)$$

وهذه المعادلة لها حل عام هو

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x + c_3$$

ولمأخذنا  $c_1 = 3$  ،  $c_2 = -5$  ،  $c_3 = 0$  لصلنا على الدالة  $g$  التي بدأنا بها .

وقد يشعر القارئ بأننا أطلنا قليلاً في المثال السابق ، إلا أن ذلك ربما كان ضرورياً في البداية ليتمكن القارئ من استيعاب الهدف المنشود من هذا البند ، ولتحصل على الخبرة المناسبة . أما في المثالين التاليين فسنختصر الخطوات اللازمة إلى حد كبير .

ملحوظة. لاحظ في المثال السابق أنه طُلب منا إيجاد معادلة تفاضلية ما ، أي أن المعادلة ليست الوحيدة التي تحقق المطلوب ، وإنما لو أثرنا على المعادلة بلي مؤثر تفاضلي آخر حصلنا على معادلة تؤدي الفرض المطلوب ، فمثلا المعادلة

$$(D-3)(D^3+2D^2)y=0$$

تؤدي نفس الفرض ، لأن حلها العام هو

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x + c_3 + c_4 e^{3x}$$

ولو أخذنا نفس قيم الثوابت  $c_1, c_2, c_3$  أعلاه إضافة إلى  $c_4 = 0$  حصلنا على نفس الدالة  $g$  التي بدأنا بها . لكن بإمكاننا أن نقول تجاوزا إن المعادلة ( 4 ) تمثل الحد الأدنى الذي نسعى إليه ، أو الذي نهدف إليه في الأمثلة والتمارين في هذا البند ، بل إن رتبة المؤثر التفاضلي  $D^3 + 2D^2$  هي الرتبة الدنيا المطلوبة ، ولا يمكن إيجاد معادلة تحقق المطلوب ذات رتبة أقل .

مثال ٢ . أوجد معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة بحيث تكون الدالة التالية حلا لها

$$g(x) = x - 20x^2 e^{-x} + 2xe^x \sin 2x \quad (5)$$

الحل : الحد الأول مرتبط بالجذر المكرر  $m_1 = m_2 = 0$  ، بينما الحد الثاني مرتبط بالجذر المكرر  $m_3 = m_4 = m_5 = -1$  ، أما الحد الثالث والآخر فمرتبط بالجذرين المركبين المكررين  $m_6 = m_7 = 1 + 2i$  ،  $m_8 = m_9 = 1 - 2i$  . وبذلك تكون المعادلة المساعدة على النحو

$$f(x) = m^2 (m+1)^3 [(m-1)^2 + 4]^2 = 0$$

أو

$$f(x) = m^2 (m+1)^3 (m^2 - 2m + 5)^2 = 0$$

ومن ثم نستنتج أن الدالة المعطاة في (5) هي حل للمعادلة التفاضلية

$$D^2 (D+1)^3 (D^2 - 2D + 5)^2 y = 0$$

والتي لها الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + e^{-x} (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) + e^x (c_6 \cos 2x + c_7 \sin 2x) + x e^x (c_8 \cos 2x + c_9 \sin 2x)$$

والذي منه نحصل على الدالة  $g$  بأخذ

$$c_1 = c_3 = c_4 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$$

وأخذ

$$c_2 = 1, \quad c_5 = -20, \quad c_9 = 2$$

### تمارين

فيما يلي أوجد لكل دالة معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة بحيث تكون الدالة المعطاة حلاً لها :

$$(1) \quad g = 9e^{-x} - 4e^{2x}$$

$$(2) \quad g = \pi e^{4x} - 15x + 21$$

$$(3) \quad g = x^3 - x^2 + e^{-x}$$

$$(4) \quad g = 3 \sin x - e^{2x}$$

$$(5) \quad g = -50x e^{-x} \cos 3x$$

$$(6) \quad g = e^{-3x} + 13e^{2x} \sin 3x$$

$$(7) \quad g = e^{ax} \cos bx$$

$$(8) \quad g = \cos x + 2 \sin x$$

$$(9) \quad g = 20 - x^2 - 6 \cos x + x \sin x$$

$$(10) \quad g = 2e^{-x} + 3e^{x/2} - 3e^{-x/2}$$

فيما يلي من التمارين أوجد جذور المعادلة المساعدة المرتبطة بمعادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة تكون الدالة المعطاة حلاً خاصاً لها :

$$(11) \quad g = x + x e^{-2x}$$

$$(12) \quad g = e^x - e^{-x} + 2$$

$$(13) \quad g = x^3 e^{3x} - \sin x$$

$$(14) \quad g = e^{2x} \cos 2x$$

- (15)  $g = -x (e^{x/2} - 2)$   
 (16)  $g = 2e^{3x} - xe^{-3x}$   
 (17)  $g = 6 \sin 2x$   
 (18)  $g = 6 \cos 2x$   
 (19)  $g = 6 (\sin 2x + \cos 2x)$   
 (20)  $g = -3 \sin^2 x$   
 (21)  $g = \sin^2 x + \cos^2 x + x$   
 (22)  $g = -x^2 \sin (x/2) + 2x \cos (x/2)$   
 (23)  $g = 2 \cos^2 x - 1$   
 (24)  $g = e^{2x} (\cos \sqrt{2} x + 5 \sin \sqrt{2} x)$   
 (25)  $g = 7e^x - xe^{-x} + x^2$   
 (26)  $g = x^2 \left( e^{x/2} - \frac{e^{x/2}}{x} \sin x \right)$

## ٢-٧ طريقة المعاملات غير المصينة

لنفترض أن لدينا المعادلة غير المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة

$$f_1(D)y = g(x). \quad (1)$$

ولو رجعنا قليلا إلى بداية البند السابق لوجدنا أنه عندما تكون  $g$  على صورة

معينة فإنه بالامكان إيجاد مؤثر تفاضلي  $f_2(D)$  يلاشي الدالة  $g$  . أو بمعنى آخر

$$f_2(D)g = 0 \quad (2)$$

وباستعمال (1) نعوض عن  $g$  في المعادلة (2) لنحصل على

$$f_2(D)f_1(D)y = 0$$

ولهذه المعادلة حل عام لا نجده عن طريق إيجاد جذور المعادلة المساعدة المرتبطة

بالمؤثر التفاضلي  $f(D) = f_2(D)f_1(D)$  ، وهي بالطبع  $f_2(m)f_1(m) = 0$  . وبالتالي

فجذور هذه المعادلة المساعدة تتكون من مجموعتين أحدهما ناشئة عن جذور المعادلة

$f_1(m) = 0$  والثانية من  $f_2(m) = 0$  . وبالتالي فإن  $y = y_c + h$  حيث  $y_c$  يمثل الحل العام للمعادلة المتجانسة  $f_1(D)y = 0$  . وعليه فإن  $h = y - y_c$  يمثل البنية الأساسية للحل الخاص  $y_p$  الذي يحقق المعادلة التفاضلية ( ١ ) . وهذه الطريقة هي التي يطلق عليها مسمى " طريقة المعاملات غير المعينة " لأنها تهدف إلى إيجاد قيم محددة ومعينة للمعاملات الاختيارية الموجودة في صيغة  $y_p$  .

مثال ١ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 3D + 2)y = 4x^2 \quad (4)$$

الحل : من الواضح أن المؤثر التفاضلي  $D^3$  يلاشي الطرف الأيمن من المعادلة ، أي أن  $f_2(D) = D^3$  بينما  $f_1(D) = D^2 + 3D + 2$  ، وعليه فإننا نحصل على المعادلة المتجانسة

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = D^3(4x^2) = 0 \quad (5)$$

الآن نكتب المعادلة المساعدة للمعادلة ( ٥ ) وهي

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0$$

أو

$$m^3(m + 1)(m + 2) = 0$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة ( ٥ ) هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2$$

وحيث أن الدالة

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

تمثل الدالة المكتملة للمعادلة ( ٤ ) ، فإن الدالة

$$y - y_c = c_3 + c_4 x + c_5 x^2$$

لا بد أن تمثل الصيغة الأساسية للحل الخاص  $y_p$  للمعادلة ( ٤ ) . ولنعد كتابة  $y_p$  مرة أخرى مع استبدال رموز الثوابت

$$y_p = A + Bx + Cx^2 \quad (6)$$

وحتى تكون  $y_p$  هذه حلاً خاصاً للمعادلة ( ٤ ) ، فلا بد من إيجاد قيم محددة للثوابت

وحتى تكون  $y_p$  هذه حلا خاصا للمعادلة ( 4 ) ، فلا بد من إيجاد قيم محددة للثوابت  $A, B, C$  . وهذا يتم عن طريق التعويض من ( 6 ) في المعادلة ( 4 ) التي تحققها الدالة

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2A + 3B + 2C \\ + (2B + 6C)x + 2Cx^2 = 4x^2$$

وبمساواة معاملات الحدود المتماثلة نحصل على النظام التالي من المعادلات الانية

$$2A + 3B + 2C = 0 \\ 2B + 6C = 0 \\ 2C = 4$$

وبحله نحصل على  $A = 7, B = -6, C = 2$  . وإذا فالحل الخاص للمعادلة ( 4 ) هو

$$y_p = 7 - 6x + 2x^2$$

وأما الحل العام لنفس المعادلة فهو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2$$

مثال ٢ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 3D)y = 6e^{3x} - 5 \sin x \quad (7)$$

الحل : بتطبيق ما تعلمناه في البند السابق ، يتبين لنا أن للمعادلة المساعدة

المرتبطة بالمؤثر التفاضلي الذي يلاشي الطرف الأيمن جذور هي  $m'_1 = 3, m'_2 = i$

$m'_3 = -i$  بينما للطرف الأيسر معادلة مساعدة ذات جذور هي  $m_1 = 0, m_2 = 3$

ولو رتبنا الجذور في قائمة واحدة لكتبنا

$$0, 3, 3, i, -i$$

ومن ثم فالحل العام يجب أن يكون على الصورة

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x$$

وحيث أن  $y_c = c_1 + c_2 e^{3x}$  ، فلا بد أن تكون  $y_p$  على الصورة

$$y_p = A x e^{3x} + B \cos x + C \sin x$$

وبالتعويض في المعادلة ( 7 ) حيث

$$y''_p - 3y'_p = 6e^{3x} - 5 \sin x$$

نجد أن

$$3A e^{3x} + (-B - 3C) \cos x + (3B - C) \sin x = 6e^{3x} - 5 \sin x$$

وبمساواة المعاملات نحصل على

$$3A = 6$$

$$-B - 3C = 0$$

$$3B - C = -5$$

ومنه ينتج لدينا أن  $A = 2$  ,  $B = -3/2$  ,  $C = 1/2$  . وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + 2x e^{3x} - (3/2) \cos x + (1/2) \sin x$$

ولعله من المفيد الآن أن تلخص هذه الطريقة في خطوات معدودة :

### طريقة المعاملات غير المعينة

حتى نجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية  $f_1(D)y = g$  لا بد أن نتبع التالي :

١ - نتأكد أولاً أن المؤثر التفاضلي  $f_1(D)$  ذو معاملات حقيقية ثابتة ، وأن الدالة  $g$  من الأنواع المحددة في البند ٧-٦ ، أي لا بد أن تكون  $g$  حلاً لمعادلة تفاضلية متجانسة  $f_2(D)g = 0$  حتى يمكن تطبيق هذه الطريقة .

ب - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة  $f_1(D)y = 0$  وليكن  $y_c$  .

ج - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة  $f_2(D)f_1(D)y = 0$  ، ولترمز له

بالحرف  $y$  ، ثم ضع  $y_c - y_p = y$  . ولزيد من التأكد لاحظ أنه لا يوجد حد من

حدود  $y_p$  يمكن أن يكون حلاً للمعادلة المتجانسة  $f_1(D)y = 0$  .

د - وحيث أن المطلوب هو تحقيق المعادلة الأصلية  $f_1(D)y_p = g$  ، فإننا نساوي

معاملات الحدود المتماثلة في كلا الطرفين لتكون نظاماً من المعادلات الخطية

المساوية في عددها لعدد المعاملات المجهولة .

هـ - أوجد حل هذا النظام من المعاملات الخطية لتحصل على الحل الخاص .

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = x \cos x - \cos x \quad (8)$$

الحل : نطبق الخطوات التي ذكرناها قبل قليل :

أ - الدالة  $g = x \cos x - \cos x$  هي حل لمعادلة متجانسة  $f_2(D)g = 0$  جذور

معادلتها المساعدة هي الجذور الأربعة

$$m'_1 = m'_2 = i, \quad m'_3 = m'_4 = -i$$

بينما المعادلة المتجانسة  $y'' + y = 0$  مرتبطة بالجذرين  $m_1 = i, m_2 = -i$

ب - الحل العام للمعادلة التفاضلية  $y'' + y = 0$  هو الناتج عن الجذرين  $m_1, m_2$  أي:

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ج - الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$f_2(D)f_1(D)y = (D - i)^2(D + i)^2(D^2 + 1)y = 0$$

هو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + A x \cos x + B x \sin x \\ + C x^2 \cos x + E x^2 \sin x$$

أي أن

$$y_p = A x \cos x + B x \sin x + C x^2 \cos x + E x^2 \sin x$$

وبالتعويض عن  $y$  بالدالة  $y_p$  في المعادلة (8) نحصل على

$$y''_p + y_p = 4E x \cos x - 4C x \sin x + (2B + 2C) \cos x \\ + (-2A + 2E) \sin x = x \cos x - \cos x$$

د - بمساواة المعاملات نجد أن

$$4E = 1, -4C = 0, 2B + 2C = -1, -2A + 2E = 0$$

والتي نحصل منها على

$$A = 1/4, B = -1/2, C = 0, E = 1/4$$

هـ - وبالتالي فالحل العام للمعادلة (8) هو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/4) [x \cos x - 2x \sin x + x^2 \sin x]$$



مثال ٤ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 4D + 5)y = 25x - 26e^{3x} \quad (9)$$

الحل : نحاول هنا وبعد الأمثلة السابقة أن نختصر بعض الشيء فلدينا هنا

$$m_1 = -2 + i, m_2 = -2 - i, m'_1 = m'_2 = 0, m'_3 = 3$$

ومن ثم

$$y_e = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y_p = A + Bx + C e^{3x}$$

لاحظ أنه لا توجد جذور مكررة بين مجموعتي  $\{m_1, m_2\}, \{m'_1, m'_2, m'_3\}$  وأن  $y_e$  لا يحتوي على أي حد من حدود  $y_p$  . وبإجراء عمليات الاشتقاق اللازمة والتعويض في المعادلة (9) ننتهي إلى المعادلة

$$5A + 4B + 5Bx + 26Ce^{3x} = 25x - 26e^{3x}$$

وبإكمال إجراءات مساواة معاملات الحدود المتماثلة نجد أن

$$A = -4, B = 5, C = -1$$

وبالتالي فالحل العام المطلوب هو

$$y_e = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 5x - e^{3x} - 4$$

مثال ٥ . أوجد الحل الخاص الذي يحقق المعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 3D)y = -18x \quad (10)$$

بحيث

$$y(0) = 0, y'(0) = 5$$

الحل : بنظرة سريعة نجد أن  $m_1 = 0, m_2 = -3$  بينما  $m'_1 = m'_2 = 0$  .

وبالتالي فالحل العام هو

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + Ax + Bx^2$$

أي أن

$$y_p = Ax + Bx^2$$

وبالتعويض عن  $y$  بالدالة  $y_p$  في المعادلة (10) نجد أن  $A = 2, B = -3$  .

وبالتالي فإن

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + 2x - 3x^2$$

ومنه

$$y' = -3c_2 e^{-3x} + 2 - 6x$$

وباستعمال الشروط الابتدائية المعطاة

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y'(0) = -3c_2 + 2 = 5$$

نجد أن  $c_1 = 1$  ,  $c_2 = -1$  , وبالتالي فالحل الخاص المطلوب هو

$$y = 1 - e^{-3x} + 2x - 3x^2$$

تمارين .

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

- (1)  $y'' - 9y = 54$
- (2)  $y'' + y' = 3$
- (3)  $(D^2 + 4D + 4)y = 2(x+3)$
- (4)  $(D^2 - 3D + 2)y = 2x^3 - 9x^2 + 6x$
- (5)  $(D^2 - 1)y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + 10 \cos 2x$
- (6)  $(D^2 - 1)y = 11x + 1$
- (7)  $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$
- (8)  $(D^2 - 4D + 4)y = e^x$
- (9)  $y'' + 25y = 6 \sin x$
- (10)  $(D^2 + D + 1)y = \cos x - x^2 e^x$
- (11)  $(D^2 + 6D + 9)y = -x e^x$
- (12)  $(D^2 - 1)y = x^2 e^x + 5$
- (13)  $(D^2 - 3D - 4)y = 6e^x$
- (14)  $y'' - y' - 2y = 1 - 2x - 9e^{-x}$
- (15)  $(D^2 - 4D + 3)y = 2(2 \sin x + \cos x)$
- (16)  $y'' - y' = e^x(1 - e^{-x})^2$

- (17)  $y'' + y = \cos x$   
 (18)  $(D^2 - 1)y = 8xe^x$   
 (19)  $(D^2 + D + 1)y = x \sin x$   
 (20)  $y'' + 4y' + 5y = 50x + 13e^{3x}$   
 (21)  $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^x + x^2$   
 (22)  $y''' - y' = x$   
 (23)  $(D^3 + 3D^2 - 4)y = e^{-2x}$   
 (24)  $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = e^x + 16 - x$   
 (25)  $(D^3 + D^2 - 4D - 4)y = 3e^{-x} - 4x - 6$   
 (26)  $y''' + 4y'' + y' - 26y = e^{-3x} \sin 2x + x$   
 (27)  $(D^4 - 1)y = e^{-x}$   
 (28)  $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = e^x + 1$   
 (29)  $(16D^4 - 1)y = e^{x/2}$   
 (30)  $(D^3 - D^2 + D - 1)y = 4 \sin x$

فيما يلي أوجد الحل الخاص المستوفي للشروط الابتدائية المعطاة :

- (31)  $y'' + y = 10e^{2x}$  ;  $y(0) = y'(0) = 0$   
 (32)  $y'' - 64y = 16$  ;  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = 0$   
 (33)  $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x}$  ;  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 8$   
 (34)  $y'' + y = 8 \cos 2x - 4 \sin x$  ;  $y(\pi/2) = -1$  ,  $y'(\pi/2) = 0$   
 (35)  $y' - y = 1$  ;  $y(0) = 0$   
 (36)  $(D^2 + 1)y = 2e^{-x}$  ;  $y(0) = y'(0) = 0$   
 (37)  $y'' + y' - 12y = e^x + e^{2x} - 1$  ;  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = 3$   
 (38)  $y'' - y' = \sin x - e^{2x}$  ;  $y(0) = 1 = -y'(0)$   
 (39)  $y'' + 4y' + 5y = 8 \sin x$  ;  $y(0) = 0 = y'(0)$   
 (40)  $y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x}$  ;  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = -1 = -y''(0)/2$

## ٤-٧ طريقة التخمين / قاعدة التركيب

solution by inspection / superposition principle

ربما كان بإمكاننا الاستغناء كلية عن هذا البند ، والاعتماد على البند السابق لكننا أثرنّا أن يُضْم هذا البند حتى ندرك أهمية السرعة والبساطة اللتين تتولدان عادة عن حس رياضي مرهف يساعد كثيرا في بناء المنطق السليم واتخاذ الخطوة الرياضية الصائبة . فلا جديد في هذا البند لا يمكن حله بطريقة البنود السابقة ، وإنما هو توفير الوقت واختصار الجهد من ناحية ، ومن ناحية أخرى اتباع للسلك الرياضي المنطقي الذي ينبذ الأسلوب الآلي المجرد دون تفكير أو تأمل .

ولنبداً بمثال بسيط لحل المعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 4D + 3)y = 15 \quad (1)$$

فهنا نعلم أن الدالة المكتملة يمكن إيجادها بسهولة من جذري المعادلة المساعدة وهما  $-1, -3$  :

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

أما الحل الخاص  $y_p$  وهو بيت القصيد في معظم هذه المسائل فيمكننا تخمينه مباشرة لو تأملنا قليلا في المعادلة ( 1 ) ، فنحن نسمي إلى إيجاد دالة  $y_p$  يؤثر عليها المؤثر التفاضلي  $D^2 + 4D + 3$  فيكون الناتج ثابتا مساويا 15 . فماذا لو اخترنا  $y_p$  لتكون مقدارا ثابتا يساوي العدد 5 ؟ أو ليس ذلك يحقق المعادلة ؟ بالتأكيد ! وكذلك الحال لو كانت لدينا أي معادلة تفاضلية على الشكل

$$(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_n)y = R_0 \quad (2)$$

حيث  $R_0$  مقدار ثابت ، و  $b_n$  ثابت يختلف عن الصفر ، فإن الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{R_0}{b_n} \quad (3)$$

لأن جميع الاشتقاقات هنا تساوي صفرا ، وبالتالي نحصل على

$$0 + 0 + \dots + b_n \left( \frac{R_0}{b_n} \right) = R_0$$

هذه حالة واحدة . وحالة أخرى عندما يكون  $b_n = 0$  في المعادلة أعلاه ، بينما

تختلف  $b_{n-1}$  عن الصفر ، أي

$$(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D) y = R_0$$

عندها لو اخترنا

$$y_p = \frac{R_0 x}{b_{n-1}}$$

لوجدنا أن جميع الاشتقاقات تساوي صفرا عدا المشتقة الأولى . ومن ثم نحصل على

$$b_{n-1} D y_p = b_{n-1} \left( \frac{R_0}{b_{n-1}} \right) = R_0$$

وبصفة عامة لو كان الاشتقاق  $D^k y$  هو الحد الأدنى الذي يظهر فعلا في المعادلة ( 2 ) أي لو كانت لدينا المعادلة

$$(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-k} D^k) y = R_0 \quad (4)$$

حيث  $R_0$  ثابت بينما  $b_{n-k}$  تختلف عن الصفر . فبنفس المنطق يهمننا أن يكون تأثير الحد الأخير على  $y_p$  مساويا لثابت بينما يكون تأثير الحدود الأخرى مساويا للصفر . وهنا نلجأ إلى ما تعلمناه سابقا ، فنحن نعلم أن  $D^k x^k = k!$  ، لذا فإن أي اشتقاق ذي رتبة أعلى من  $k$  سيلاشي حتما  $x^k$  . لهذا كان من الطبيعي أن نختار

$$y_p = \frac{R_0 x^k}{k! b_{n-k}} \quad (5)$$

والذي سيكون بالتأكيد حلا خاصا للمعادلة ( 4 ) .

مثال ١ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^5 + 9D^3) y = 5 \quad (6)$$

الحل : من المعادلة المساعدة  $m^5 + 9m^3 = 0$  نحصل على الجذور  $0, 0, 0, 3i, -3i$

وبالتالي نحصل على الدالة المكمل

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x$$

أما الحل الخاص  $y_p$  فهو كما ذكرنا أعلاه لا بد أن يساوي مقدارا ثابتا مضروباً في

الدالة  $x^3$  لأن  $D^3$  هو الحد ذو الاشتقاق الأدنى في المعادلة ، وبمعنى آخر فإن

$$y_p = \frac{5x^3}{3! \cdot 9} = \frac{5x^3}{54}$$

وللتأكد نعوض في المعادلة ( 6 ) حيث

$$D^5 y_p = 0 , D^3 y_p = \frac{5}{9}$$

ومن ثم فإن

$$(D^5 + 9D^3)y_p = 0 + 9(5/9) = 5 = R_0$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x + \frac{5x^3}{54}$$

ولننظر الآن إلى المعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 4)y = 5 \cos 3x \quad (7)$$

فنحن هنا نبحث عن حل خاص  $y_p$  يتناسب طردياً مع  $\cos 3x$  لأن كونه متناسباً طردياً مع  $\cos 3x$  يعني أن اشتقاقه الثاني  $D^2 y_p$  يتناسب كذلك طردياً مع  $\cos 3x$  . وبالتأكيد فإن كان

$$y_p = A \cos 3x \quad (8)$$

فإن

$$D^2 y_p = -9A \cos 3x$$

ومن ثم يكون  $y_p$  حلاً للمعادلة ( 7 ) إذا كان

$$(-9 + 4)A = 5$$

أو

$$A = -1$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة ( 7 ) هو

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \cos 3x$$

ولو طبقنا طريقة المعاملات غير المعينة لحل المعادلة ( 7 ) لافترضنا أن

$$y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$$

وبالتعويض في ( 7 ) نجد أننا سنحصل بعد عدة عمليات جبرية على القيمتين

$$A = 0 , B = -1$$

وهكذا وبقليل من الحس الرياضي وبمزيد من المران يمكننا أن نخمن الحل الخاص عندما تكون  $g$  دالة ذات وضع معين وتكون المعادلة التفاضلية في صورة معينة .

لكن هذا لا يعني البتة أن هذه الطريقة تجدي مع أي معادلة تفاضلية حتى لو كانت بسيطة المظهر ، فالمعادلة نور كبير في نجاح هذه الطريقة ، فمثلا لو أردنا إيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + 4D + 5)y = 8 \sin x$$

من طريق محاولة أن يكون  $y_p$  متناسبا مع  $\sin x$  لفشلنا بسبب وجود الحد الأوسط  $4Dy$  الذى يتناسب مع  $\cos x$  وليس مع  $\sin x$  ، ولا يُوجد أي حد في طرفي المعادلة يمكن أن يعوض أو يلغي الحد المحتوي على  $\cos x$  ، ولذا يستحيل وجود حل خاص على الصورة  $y_p = A \sin x$  . ولتأكيد ذلك نطبق طريقة المعاملات غير المعينة فنجد بعد سلسلة من العمليات الجبرية أن

$$y_p = \sin x - \cos x .$$

ولهذا - وكما أسلفنا - فإننا نحتاج إلى رهافة الحس الرياضي وكثرة الخبرة والمران حتى يمكننا أن نحدد بسرعة ودقة صلاحية المعادلة التفاضلية المعطاة لتطبيق طريقة التخمين هذه ، ومن ثم اقتراح الحل الخاص المناسب في حالة صلاحية المعادلة ، فإن لم تكن صالحة منذ الوهلة الأولى فنلجأ إلى الطريقة التقليدية التي درستها في البند الماضي .

والآن ننتقل إلى قاعدة أخرى تسمى قاعدة التركيب ، ونعني بها تركيب الحل الخاص من الحلين الخاصين المعطيين .

**قاعدة التركيب.** ليكن  $y_1$  الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = R_1(x)$$

وليكن  $y_2$  الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = R_2(x)$$

عندها يكون  $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$  هو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = c_1 R_1(x) + c_2 R_2(x)$$

حيث  $c_1, c_2$  ثابتين اختياريين .

ملحوظة .

١ - يمكن تعميم قاعدة التركيب إلى أي عدد محدود من المعادلات التفاضلية . فلو

أن  $y_k$  تمثل الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = R_k(x)$$

حيث  $k = 1, 2, \dots, n$  ، عندها تمثل الدالة

$$y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

الحل الخاص للمعادلة

$$f(D)y = c_1 R_1(x) + \dots + c_n R_n(x)$$

حيث  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ثوابت اختيارية .

ب - يمكن أن ننظر إلى قاعدة التركيب من الاتجاه المعاكس ، أي أن بحثنا عن الحل

الخاص للمعادلة

$$f(D)y = R(x)$$

يمكن تجزئته إلى مراحل من طريق معاملة كل حد من  $R(x)$  على حدة ، ثم ضمها مرة

أخرى لإيجاد الحل الخاص المطلوب .

مثال ٢ . لو علمنا أن

$$y_1 = -\frac{x+2/3}{3} , y_2 = \frac{e^{2x}}{5}$$

هما الحلان الخاصان على الترتيب للمعادلتين

$$(D^2 + 2D - 3)y = x , (D^2 + 2D - 3)y = e^{2x}$$

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + 2D - 3)y = 3x - 5e^{2x}$$



الحل : باستخدام قاعدة التركيب نجد أن الحل الخاص المطلوب هو :

$$\begin{aligned} y &= 3y_1 - 5y_2 = 3 \left( -\frac{x+2/3}{3} \right) - 5 \left( \frac{e^{2x}}{5} \right) \\ &= -\left( x + \frac{2}{3} \right) - e^{2x} \end{aligned}$$

مثال ٢ . أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 - 9)y = 4e^x + 3x - 5 \sin 2x$$

الحل : نحاول تطبيق قاعدة التركيب وكذلك طريقة التخمين لإيجاد الحل الخاص المطلوب . ولنبدأ بالمعادلة

$$(D^2 - 9)y = e^x$$

وحلها الخاص هو  $y_1 = -\frac{e^x}{8}$  . أما المعادلة

$$(D^2 - 9)y = x$$

فحلها الخاص هو  $y_2 = -\frac{x}{9}$  ، بينما الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 - 9)y = \sin 2x$$

هو  $y_3 = -\frac{\sin 2x}{13}$  ومن ثم فالحل الخاص المطلوب هو

$$\begin{aligned} y_p &= 4y_1 + 3y_2 - 5y_3 \\ &= -\frac{e^x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{5}{13} \sin 2x \end{aligned}$$

مثال ٤ . أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 4y = \sin x - 4 \sin 2x \quad (9)$$

الحل : باستعمال قاعدة التركيب ( وطريقة التخمين إن أمكن ) نجد أولاً أن

$$y_1 = \frac{\sin x}{3}$$

$$y'' + 4y = \sin x$$

أما بالنسبة للمعادلة

$$y'' + 4y = \sin 2x \quad (10)$$

فلا يمكن استعمال طريقة التخمين لحلها لأن جذور المعادلة المساعدة المرتبطة بالمعادلة المتجانسة

$$y'' + 4y = 0$$

هي  $m = \pm 2i$  . ولذلك فإن أي دالة على الصورة  $y = A \sin 2x$  تحقق المعادلة المتجانسة ولا تحقق المعادلة (10) غير المتجانسة ، ولذلك لا بد من استعمال طريقة

العامات غير المعينة . ونظرا لأن  $m' = \pm 2i$  أيضا ، فإن

$$y_2 = A x \sin 2x + B x \cos 2x$$

وبالتعويض في (10) نحصل على

$$4A x \cos 2x - 4B x \sin 2x = \sin 2x$$

ومنه نجد أن  $A = 0$  ،  $B = -\frac{1}{4}$  ، أي أن

$$y_2 = -\frac{x}{4} \cos 2x$$

وبالتالي فالحل الخاص المطلوب للمعادلة هو

$$y_p = \frac{\sin x}{3} + x \cos 2x$$

ملحوظة . لو تأملنا مثال ٤ فإنه يمكننا إدراك القاعدتين التاليتين :

أولا : في الحالة التي تكون المعادلة فيها على النمط

$$(D^2 + a^2)y = \sin bx \quad (11)$$

وفي حالة اختلاف  $a$  من  $b$  ، فإن الحل الخاص يكون تلقائيا

$$y_p = (a^2 - b^2)^{-1} \sin bx \quad (12)$$

ثانيا : أما في حالة تساوي  $a$  مع  $b$  ، فإن المعادلة (11) تصبح على النحو

$$(D^2 + a^2)y = \sin ax \quad (13)$$

ولا يمكن إيجاد حل خاص للمعادلة (13) من النوع  $y_p = A \sin ax$  لأن  $D^2 + a^2$

ستلاشي  $A \sin ax$  ، ولكن حلها الخاص يحمل الصيغة

$$A x \cos ax + B x \sin ax$$

وبالتعويض في (13) نجد أنه لا بد أن تتحقق المعادلة  

$$-2a A x \sin ax + 2a B x \cos ax = \sin ax$$
 ومنه نستنتج أن  $A = \frac{-1}{2a}$  ,  $B = 0$  . ومن ثم يكون

$$y_p = \frac{-x \cos ax}{2a}$$

هو الحل الخاص المناسب للمعادلة (13) . لاحظ في كلتا الحالتين إمكانية أن تكون  $a$  عددا مركبا .

وبالمقابل فإننا نترك للقارئ برهنة المثال التالي :

مثال ٥ . اثبت أنه في حالة اختلاف  $a$  عن  $b$  , فإن الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + a^2)y = \cos bx$$

هو

$$y_p = (a^2 - b^2)^{-1} \cos bx$$

أما إذا كانت  $a = b$  , فإن

$$y_p = \left( \frac{x}{2a} \right) \sin ax$$

تمثل الحل الخاص .

#### تمارين

عن طريق التخمين , أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية التالية . تحقق من إجابتك في كل مرة .

(1)  $(D^2 + 4)y = 16$

(2)  $(D^2 + 25)y = -25$

(3)  $(3D^2 - 6D + 3)y = -15$

(4)  $(5D^3 - 7D^2 + 9D - 3)y = -9$

(5)  $(D^4 - 3D^2)y = 12$

- (6)  $(D^3 + 2D)y = 5$
- (7)  $(D^3 - 5D)y = 40$
- (8)  $(D^6 + D^2)y = -12$
- (9)  $(D^4 + 4D^3 + 2D^2)y = -6$
- (10)  $(3D^7 - 6D^6 + 4D^5)y = 100$
- (11)  $(D^2 + 9)y = 3 \cos x$
- (12)  $(D^2 + 4)y = 6 \sin x$
- (13)  $(D^2 + 1)y = -2 \cos \sqrt{2} x$
- (14)  $(D^2 + 9)y = 4 \sin \sqrt{3} x$
- (15)  $(D^2 + 4)y = 5 \cos 3x$
- (16)  $(D^2 + 4)y = 8x + 1 - 15e^x$
- (17)  $(D^2 + D)y = 3(2 + e^{2x})$
- (18)  $(D^2 - D - 2)y = 2e^{-2x}$
- (19)  $(D^2 + D - 1)y = e^x + x - 2$
- (20)  $(D^3 + 2D^2 + 1)y = 12e^x$
- (21)  $(D^2 - 1)y = \sin 2x$  ;  $(D^2 + a^2)y = \sin bx$ ,  $a = i$ ,  $b = 2$  : تلميح
- (22)  $(D^2 - 2)y = 2x - 3$
- (23)  $(D^2 - 4)y = -26$
- (24)  $(D^2 + 1)y = 5e^{-x}$
- (25)  $(D^2 + 2D + 1)y = 4e^{-x}$
- (26)  $(D - 1)^2 y = 6e^{-2x}$
- (27)  $(D^2 - 7D + 3)y = e^x$
- (28)  $(4D^2 + 1)y = 12 \sin x$
- (29)  $(4D^2 + 1)y = -12 \cos x$
- (30)  $(D^3 - 1)y = 5x^2 - 4$
- (31)  $(D^4 + 4)y = 3e^{2x}$
- (32)  $(D^4 + 4)y = -5 \sin 2x$

$$(33) \quad (D^3 - D)y = -5 \cos 2x$$

$$(34) \quad (D^4 + 4)y = 3e^{2x} - 5 \sin 2x$$

$$(35) \quad (D^5 - D^3 - 10D)y = 20 \sin 2x$$

## ٧-٥ ملخص الباب

وكما يبدو من عنوان الباب ، فقد تم التركيز فيه على المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة . وليس ذلك فحسب ، بل اشترطنا هنا أن تكون الدالة  $R(x)$  ( الطرف الأيمن من المعادلة ) من نوع خاص ، وحتى نكون أكثر دقة ، فقد اشترطنا أن تكون  $R$  نفسها حلا لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة ، وبالتالي فإن أي حد من حدودها لن يتجاوز أن يكون ثابتا أو كثيرة حدود في  $x$  أو دالة أسية في صورة  $e^{\alpha x}$  أو دالة مثلثية من نوع  $\sin \beta x$  ،  $\cos \beta x$  أو مجموع أو حاصل ضرب دوال من هذه الأنواع .

فإذا ما كانت  $R(x)$  ( أو  $g(x)$  كما رمزنا لها في البندين ٧-٢ ، ٧-٣ ) مستوفية للشرط الذي ذكرناه آنفا ، فإننا عندئذ نطبق ما يُسمى بطريقة المعاملات غير المعينة لإيجاد الحل الخاص للمعادلة لغير المتجانسة ، ثم نضيف اليه الدالة الكاملة لنحصل على الحل العام للمعادلة .

أما البند ٧-٤ فقد تناول البحث عن الحل الخاص للمعادلة من طريق التخمين توفيراً للوقت واختصاراً للجهد اللذين عادة ما يتضاعفان عند استعمال طريقة " المعاملات غير المعينة " إلا أن مدى فعالية التخمين أقل بكثير من مدى فعالية طريقة المعاملات غير المعينة . هذا ويتطلب التخمين حتما رياضيا جيدا إضافة إلى بعض الخبرة والمران .

وقد شمل البند ٧-٥ أيضا تطبيق قاعدة التركيب لحل المعادلات غير المتجانسة ، وهي طريقة تدخل ضمن نطاق فعاليات طريقة المعاملات غير المعينة إلا أنها توفر كثيرا من الوقت والجهد مع زيادة في الدقة وتقليل من حجم الخطأ .



## الباب الثامن

# المعاملات الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية

■ مقدمة ■ طريقة الحيزال الرتبة ■ طريقة تغير الوسطاء ■ ملخص الباب ■ نماين عامة .





## ٨-١ مقدمة

في الباب السابق تعلمنا كيف نجد حل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة

$$(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_0)y = R(x) \quad (1)$$

وذلك باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة . ولكن وكما علمنا من الباب السابق أن لهذه العملية قصورا واضحا ، فهي قابلة للتطبيق فقط عندما تكون  $R$  نفسها حلا لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة .

وفي هذا الباب سنحاول التغلب على هذا القصور عن طريق دراسة طريقتين جديدتين تتجاوزان هذا القصور ، بل يمكن استخدامها لحل المعادلات الخطية ذات المعاملات المتغيرة أيضا .

## ٨-٢ طريقة اختزال الرتبة

لتكن لدينا المعادلة الخطية المتجانسة ذات الرتبة الثانية

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

ولتكن  $y_1 \neq 0$  حلا لهذه المعادلة ، أي أن

$$y_1 + p y_1' + q y_1 = 0 \quad (2)$$

وحيث أننا نسمى لإيجاد حل آخر للمعادلة (2) يكون مستقلا خطيا عن  $y_1$  فقد يكون من المناسب أن نقدم الاقتراح التالي

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) \quad (3)$$

حيث  $v$  دالة متغيرة نسمى لإيجاد صيغتها فيما بعد ، ومن ثم نجد قيمة  $y_2$  .

بمفاضلة حاصل الضرب  $v y_1$  نجد أن

$$\begin{aligned} y_2 &= v y_1 + v' y_1 \\ y_2 &= v y_1' + v'' y_1 + 2y_1' v' \end{aligned}$$

وباستعمال هاتين المعادلتين نعوض عن  $y_2$  في المعادلة (1) لنحصل على

$$(v y_1'' + 2v' y_1' + v'' y_1) + p(v y_1' + v' y_1) + q v y_1 = 0$$

أو

$$v'' y_1 + (2y_1' + p y_1) v' + (y_1'' + p y_1' + q y_1) v = 0 \quad (4)$$

لكن  $y_1$  تحقق المعادلة (2)، أي أن معامل  $v$  في المعادلة (4) يساوي الصفر، وبذلك

نختصر المعادلة (4) إلى المعادلة

$$v'' y_1 + (2y_1' + p y_1) v' = 0 \quad (5)$$

الآن نجري التعويض  $v' = w$  فتتحول المعادلة (5) بعد قسمتها على  $y_1$  إلى المعادلة

$$w' + \left( p + \frac{2y_1'}{y_1} \right) w = 0 \quad (6)$$

وهي معادلة خطية ذات متغيرات منفصلة حيث أنها مكافئة للمعادلة

$$\frac{w'}{w} + \left( p + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right) = 0$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\ln |w| + 2 \ln |y_1| = - \int p \, dx$$

أو

$$w y_1^2 = e^{- \int p \, dx}$$

ومنه

$$v' = w = \frac{\left[ e^{- \int p \, dx} \right]}{y_1^2}$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى ومن ثم إيجاد قيمة  $y_2$  باستخدام (3)

$$y_2 = y_1 v = y_1 \left[ \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx \right] \quad (7)$$

وللتأكد من الاستقلال الخطي للحل  $y_2$  نجد الروتسكيان

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & \frac{e^{-\int p dx}}{y_1} + y_1' \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx \end{vmatrix}$$

$$= e^{-\int p dx} \neq 0$$

مثال ١. لو علمنا أن  $y_1 = x^2$  تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (8)$$

أوجد الحل العام الصالح للفترة  $(0, \infty)$ .

الحل : نعيد كتابة المعادلة (8) في الصيغة البديلة بعد القسمة على  $x^2$

$$y'' - \left(\frac{3}{x}\right)y' + \left(\frac{4}{x^2}\right)y = 0 \quad (9)$$

وباستعمال (7) نحصل على

$$y_2 = x^2 \left[ \int \frac{e^{\int x^{-4} dx}}{x^4} dx \right] = x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln x$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

مثال ٢ . بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (10)$$

يمكننا أن نتحقق أن الدالة  $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  تمثل حلا لها على الفترة  $(0, \infty)$  . أوجد

الحل العام للمعادلة (10) .

الحل : نقسم أولا المعادلة (10) على  $x^2$  ثم نطبق القانون (7) لنحصل على

$$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int x^{-1/2} dx}}{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \csc^2 x \, dx$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (-\cot x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

ومن ثم فالحل العام للمعادلة (10) هو

$$y = \frac{c_1 \sin x + c_2 \cos x}{\sqrt{x}}$$

وهكذا نكون قد أتممنا استعراض طريقة اختزال الرتبة لإيجاد حل آخر  $y_2$  بملفومية حل معلوم  $y_1$  لمعادلة متجانسة من الرتبة الثانية لا يُشترط أن تكون معاملات ثابتة ، بحيث يكون  $y_1, y_2$  مستقلين خطيا .

الآن نتناول المعادلة غير المتجانسة من نفس الرتبة ، ونحاول أن نطبق عليها نفس الطريقة لإيجاد الحل الخاص للمعادلة بملفومية حل معلوم للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة .

ولنبدأ بالمعادلة غير المتجانسة

$$y'' + p y' + q y = R \quad (11)$$

ولتكن الدالة  $y_1$  حلا للمعادلة المتجانسة

$$y'' + p y' + q y = 0$$

ولنستعمل نفس الاقتراح السابق

$$y_2 = v y_1$$

ثم نتدرج نفس التدرج السابق مع ملاحظة أن الطرف الأيمن من المعادلة (4) هو

$R(x)$  وليس صفرا ، وكذلك الحال مع المعادلة (5) حيث تصبح

$$v'' y_1 + (2y_1' + p y_1) v' = R \quad (12)$$

وبجعل  $v' = w$  نحصل على المعادلة الخطية

$$y_1 w' + (2y_1' + p y_1) w = R$$

ويطبق نظرية البند ٢-٦ نجد عامل المكاملة ومنه نجد  $w$  ثم نجد  $v$  بمكاملة

$w$  ، وأخيرا نحصل على الحل الخاص  $y_1 v = y$  .

مثال ٣ . أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^{2x} \quad (13)$$

الحل : الدالة المكاملة للمعادلة هي

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

سوف نستعين بالحل  $y_1 = e^{2x}$  لتطبيق طريقة اختزال الرتبة ، وذلك باختيار

$$y = v e^{2x}$$

ومنه

$$y' = v' e^{2x} + 2v e^{2x}$$

$$y'' = v'' e^{2x} + 4v' e^{2x} + 4v e^{2x}$$

وبالتعويض في المعادلة (13) ينتج لدينا

$$v'' e^{2x} - v' e^{2x} = e^{2x}$$

أو

$$v'' - v' = 1$$

الآن نضع  $w = v'$  ليكون لدينا

$$w' - w = 1$$

وهي معادلة خطية عامل مكاملتها هو

$$u = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

ومن ثم

$$w' e^{-x} - w e^{-x} = e^{-x}$$

أو

$$\frac{d}{dx}[w e^{-x}] = e^{-x}$$

ثم نكامل الطرفين

$$w e^{-x} = -e^{-x}$$

أو

$$w = v' = -1$$

ومنه

$$v = -x$$

وإذا

$$y = -x e^{2x}$$

هو الحل الخاص للمعادلة (13) . أما الحل العام لها فهو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - x e^{2x}$$

ملحوظة . من الواضح أنه كان بإمكاننا تطبيق طريقة المعاملات غير المعينة لحل معادلة المثال السابق . وربما كان ذلك أفضل وأيسر ، ولكن كما أسلفنا سابقا ، لا يمكن الاعتماد على طريقة المعاملات غير المعينة إلا إذا كانت  $R(x)$  نفسها حلا لمعادلة متجانسة ذات معاملات ثابتة كما هو الحال في المثال السابق . ولذا فإن معادلة المثال التالي لا يمكن حلها بطريقة المعاملات غير المعينة ، وإنما يمكن عند هذه المرحلة استعمال طريقة اختزال الرتبة .

مثال ٤ . أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2 + 1)y = \sec^3 x \quad (14)$$

الحل : الدالة المكتملة للمعادلة هي

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

وسنفترض  $y = v \sin x$  كحل خاص مقترح . ومنه نحصل على

$$y' = v' \sin x + v \cos x$$

$$y'' = v'' \sin x + 2v' \cos x - v \sin x$$

وبالتعويض في (14) نجد أن

$$v'' \sin x + 2v' \cos x = \sec^3 x$$

وبوضع  $v' = w$  نصل إلى المعادلة الخطية

$$w' \sin x + 2w \cos x = \sec^3 x$$

وبالمضرب في  $\sin x$  ينتج لدينا

$$w' \sin^2 x + w (2 \sin x \cos x) = \sec^3 x \sin x$$

أو

$$d(w \sin^2 x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

وبكاملة الطرفين نحصل على

$$w \sin^2 x = \frac{1}{2} (\cos x)^{-2}$$

أي أن

$$\begin{aligned} v' = w &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\csc^2 x + \sec^2 x) \end{aligned}$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على

$$v = \frac{1}{2} (-\cot x + \tan x)$$

وبالتالي فالحل الخاص الذي نريده هو

$$y_p = v \sin x = \frac{1}{2} \left( -\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos x} \right) = \frac{1}{2} (\sec x - 2 \cos x)$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \sec x$$

لاحظ أن الحد  $-\cos x$  في الحل الخاص  $y_p$  قد تم ضمه إلى الحد العام .

### تمارين

باستخدام طريقة اختزال الرتبة ، أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

- (1)  $(D^2 - 1)y = x - 1$
- (2)  $(D^2 + 4)y = 5e^x - 4x$
- (3)  $(D^2 + 4)y = 4 \sin^2 x$
- (4)  $(D^2 - 1)y = e^x$
- (5)  $(D^2 + 1)y = \sec x$
- (6)  $(D^2 + 1)y = \sec x$
- (7)  $(D^2 + 1)y = -\sec^3 x$
- (8)  $(D^2 + 1)y = \cot x$
- (9)  $y'' + 2y' + y = (1 - e^x)^{-2}$

فيما يلي مرفق مع كل معادلة تفاضلية أحد حلولها . أوجد الحل الآخر :

- (10)  $y'' - 4y' + 4y = 0; y_1 = e^{2x}$
- (11)  $y'' - y = 0; y_1 = (e^x + e^{-x}) / 2$
- (12)  $xy'' - 7xy' + 16y = 0; y_1 = 4$
- (13)  $xy'' + y' = 0; y_1 = \ln x$



$$(14) \quad (1-2x-x^2)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0; \quad y_1 = 1+x$$

$$(15) \quad x^2y'' - xy' + 2y = 0; \quad y_1 = x \sin(\ln x)$$

$$(16) \quad (1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1 = e^{-2x}$$

$$(17) \quad x^2y'' - xy' + y = 0; \quad y_1 = x$$

$$(18) \quad x^2y'' - 5xy' + 9y = 0; \quad y_1 = x^3 \ln x$$

$$(19) \quad x^2y'' - 4xy' + 6y = 0; \quad y_1 = x^2 + x^3$$

$$(20) \quad (3x+1)y'' - (9x+6)y' + 9y = 0; \quad y_1 = e^{3x}$$

$$(21) \quad y'' - 3y' \tan x = 0; \quad y_1 = 1$$

فيما يلي مرفق مع كل معادلة تفاضلية غير متجانسة حل للمعادلة المتجانسة .  
أوجد الحل الآخر ، وكذلك أوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة :

$$(22) \quad y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}; \quad y_1 = e^x$$

$$(23) \quad (x-1)y'' - xy' + y = 1; \quad y_1 = e^x$$

## ٨-٣ طريقة تغير الوسطاء

في البند السابق رأينا أنه إذا كانت  $y_1$  حلاً للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

عندها يمكننا الاستعانة بالحل  $y_1$  لإيجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x) \quad (2)$$

وأسمينا هذه الطريقة طريقة اختزال الرتبة ، وتكمن الاستعانة بالحل  $y_1$  في حقيقة أن  $y_1$  يعتبر أيضاً حلاً للمعادلة (1) . ثم درسنا احتمال إحلال الدالة  $v(x)$  محل الثابت الاختياري  $c_1$  ، ونظرنا إلى إمكانية وجود حل للمعادلة (2) على الهيئة  $y_1 v$  . وبالحل فقد قادنا هذا الافتراض إلى معادلة خطية ذات متغيرات منفصلة كان بمقدورنا إيجاد حل لها .

أما في طريقة تغير الوسطاء فنبدأ بفرضية أننا نعلم كلا الحلين المستقلين

خطياً  $y_1$  ،  $y_2$  للمعادلة (1) ، أي أن

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (3)$$

هو الحل العام للمعادلة (1) حيث  $c_1, c_2$  ثابتان اختياريان . أما مبدأ هذه الطريقة الجديدة فيقوم على أساس إيجاد حل للمعادلة (2) عن طريق إحلال دالتين  $v_1(x), v_2(x)$  محل الثابتين  $c_1, c_2$  ، أي أننا نسعى لإيجاد حل للمعادلة (2)

على الصيغة

$$v(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) \quad (4)$$

وحيث أننا نتعامل مع دالتين مجهولتين  $v_1(x), v_2(x)$  فمن المعلوم أن نتوقع الانتهاء بمعادلتين تشتملان هاتين الدالتين حتى يمكن تعديدهما . ومن الطبيعي أن تكون المعادلة (2) أولى هاتين المعادلتين . ويتبقى علينا فرض شرط يجمع كلا من  $v_1, v_2$  يكون في صالحنا ، بمعنى أن يجعل العملية أكثر سهولة وأقل تعقيدا . وربما كان من السهل علينا أن نختار  $v_2(x) = 0$  ، لكن هذا الاختيار يعيدنا مرة أخرى إلى طريقة اختزال الرتبة التي سبق أن درسناها . إذا ما هو الشرط الثاني الكفيل بإنتاج المعادلة الثانية التي نحتاجها لإيجاد  $v_1, v_2$  ؟ لنترك الإجابة إلى ما بعد

الخطوة التالية ، ولنفاضل  $y$  لنحصل على

$$y' = (v_1' y_1 + v_2' y_2) + (v_1 y_1' + v_2 y_2') \quad (5)$$

وهنا تبدو ملامح الاختيار المناسب . فبدلاً من أن نخوض في معالجة اشتقاقات عليا للدالتين  $v_1, v_2$  ، وبدلاً من أن تزداد العمليات الجبرية تعقيدا ، فإننا نختار الشرط

التالي المتمثل في المعادلة التالية

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad (6)$$

وبذلك تصبح المعادلة (5) على النحو

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \quad (7)$$

ثم

$$y'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' \quad (8)$$

وبالتعويض عن  $y, y', y''$  من المعادلات (4), (7) و (8) على التوالي في

المعادلة (2) ثم تبسيطها جبرياً نجد أن

$$v_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + v_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x)$$

لكن كلا من  $y_1, y_2$  يحقق المعادلة (1) ومن ثم تختصر المعادلة الأخيرة إلى المعادلة

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \quad (9)$$

وهكذا خالصنا إلى المعادلتين الآتيتين (6) و (9)

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' &= R(x) \end{aligned} \quad (10)$$

ويمكن إعادة كتابتهما على الشكل

$$\begin{aligned} y_1 v_1' + y_2 v_2' &= 0 \\ y_1' v_1 + y_2' v_2 &= R(x) \end{aligned} \quad (11)$$

والقصد من ذلك هو أن ننظر إلى  $v_1'$  ,  $v_2'$  على أساس أنهما المجهولان اللذين نسمى إلى إيجادهما ، بينما نعامل الدوال المعلومة  $y_1$  ,  $y_1'$  ,  $y_2$  ,  $y_2'$  على أساس أنهم المعاملات الثابتة . ومن هذا المنطلق فإن النظام (11) يوجد له حل إذا كانت المحددة

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

تختلف عن الصفر . وهذا واقع بالفعل إذ أن المحددة عبارة عن  $W[y_1, y_2]$  أو رونسكيان  $y_1$  ,  $y_2$  الذي يختلف عن الصفر لكون  $y_1$  ,  $y_2$  مستقلين خطياً ( انظر الباب الخامس ) . وبحل النظام (11) نصل إلى القانونين

$$v_1' = -\frac{y_2 R}{W} , \quad v_2' = \frac{y_1 R}{W} \quad (12)$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2 R}{W} dx , \quad v_2(x) = \int \frac{y_1 R}{W} dx \quad (13)$$

هذا ويمكننا تلخيص هذه الخطوات على النحو التالي :

طريقة تغير الوسطاء

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة  $y' + p y + q y = R$  اتبع الخطوات التالية :

١ - أوجد حلين مستقلين خطياً  $y_1$  ,  $y_2$  للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة ثم خذ الدالة

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

ب - أوجد قيم  $v_1, v_2$  من المعادلة (13) أعلاه ، أو بإيجاد حل للنظام (11) .  
 ج - عوض عن  $v_1, v_2$  في المعادلة  $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$  لتحصل على الحل الخاص المطلوب .

ملحوظة . نظرا لطول العمليات الجبرية المطلوبة للوصول إلى المعادلة (13) يُستحسن بعد إيجاد  $y_1, y_2$  الشروع في حل النظام (11) ، أو تطبيق القانونين في (12) أو (13) مباشرة لاستخراج  $v_1, v_2$  ومن ثم الحل الخاص  $y$  . وهذا ما سنلجأ إليه في الأمثلة التالية ، وبإمكان الطالب أن يسلك الطريق الطويل إذا رغب في ذلك تفاديا لحفظ القرائين في (12) أو (13) .

مثال ١ . أوجد الحل العام على الفترة  $(-\pi/2, \pi/2)$  للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 1)y = \tan x$$

الحل : نجد أولا حلي المعادلة المتجانسة ذات العلاقة وهما

$$y_1 = \cos x , y_2 = \sin x$$

ولكي نطبق مباشرة القانون (13) نجد أولا

$$W[y_1, y_2] = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ومن ثم يكون لدينا

$$\begin{aligned} v_1(x) &= - \int \tan x \sin x \, dx = - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos x} \, dx = - \int (\cos x - \sec x) \, dx \\ &= \sin x - \ln |\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

وكذلك

$$v_2(x) = \int \tan x \cos x \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

وبالتالي فالحل الخاص المطلوب هو

$$\begin{aligned} y_p &= (\sin x - \ln |\sec x + \tan x|) \cos x - \cos x \sin x \\ &= -\cos x \ln |\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 3D + 2)y = (1 + e^{-x})^{-1} - 20 \cos x \quad (14)$$

الحل : لمزيد من التبسيط سنلجأ إلى تطبيق قاعدة التركيب ، أي أن ننظر إلى كل من المعادلتين التاليتين على حدة

$$(D^2 - 3D + 2)y = (1 + e^{-x})^{-1} \quad (15)$$

و

$$(D^2 - 3D + 2)y = \cos x \quad (16)$$

وذلك بإيجاد الحل الخاص لكل منهما ثم نطبق القاعدة المذكورة لاستخراج الحل الخاص للمعادلة (14) ( انظر البند ٧-٤ ) .

ولنبدأ بادئ ذي بدء بإيجاد حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة ،

وحيث أن جذري المعادلة المساعدة هما 1, 2 ، فإن الحلين المطلوبين هما

$$y_1 = e^x , \quad y_2 = e^{2x}$$

$$W[y_1, y_2] = e^{3x}$$

والآن نشرع في إيجاد الحل الخاص للمعادلة (15) باستعمال القانون (13)

$$\begin{aligned} v_1 &= - \int \frac{e^{2x} (1 + e^{-x})^{-1}}{e^{3x}} dx = - \int e^{-x} (1 + e^{-x})^{-1} dx \\ &= \ln (1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \int \frac{e^x (1+e^{-x})^{-1}}{3x} dx = \int e^{-2x} (1+e^{-x})^{-1} dx \\ &= \int e^{-x} e^{-x} (1+e^{-x})^{-1} dx \\ &= \ln (1+e^{-x}) - (1+e^{-x}) \end{aligned}$$

إذا الحل الخاص المطلوب للمعادلة (15) هو

$$y_p(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) - e^{2x} - e^x + e^{2x} \ln(1+e^{-x}) \quad (17)$$

ولإيجاد الحل الخاص للمعادلة (16) نستعمل طريقة المعاملات غير المعينة لسهولة حلها  
نحصل في النهاية على الحل الخاص

$$y_p(x) = \frac{\cos x - 3 \sin x}{10} \quad (18)$$

وباستعمال قاعدة التركيب نحصل من (17) ، (18) على الحل العام

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (e^{2x} + e^x) \ln(1+e^{-x}) + 6 \sin x - 2 \cos x \\ \text{مع ملاحظة أن المعدين } e^x, e^{2x} \text{ في (17) قد تم دمجهما مع الحد العام } c_1 e^x + c_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

ورب سائل يسأل : هل يمكن تطبيق طريقة تغير الوسطاء على معادلات تفاضلية ذات رتبة أعلى من اثنين ؟ والجواب : نعم يمكن ذلك ، وبنفس الأسلوب تقريباً ، فلو كانت لدينا المعادلة

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = R(x) \quad (19)$$

وكان الحل العام للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة على النحو

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

فإننا نفترض أن الحل الخاص للمعادلة يكون على النحو

$$y = v_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + v_n y_n$$

حيث  $v_1, v_2, \dots, v_n$  دوال في المتغير  $x$  نسمى إلى إيجادها لتحديد  $y$  . ولأن  $y$  تحقق المعادلة (19) وجب علينا أن نشتق  $y$  حتى نصل إلى الاشتقاق  $D^n y$  ، وفي كل اشتقاق نجمع الحدود المشتقة على الاشتقاقات الأولى للدوال  $v_1, v_2, \dots, v_n$

ثم نساويها بالصفر ، وبالتالي نحصل على النظام

$$y_1 v'_1 + y_2 v'_2 + \dots + y_n v'_n = 0$$

$$y'_1 v'_1 + y'_2 v'_2 + \dots + y'_n v'_n = 0$$

$$y_1^{(n-2)} v'_1 + y_2^{(n-2)} v'_2 + \dots + y_n^{(n-2)} v'_n = 0$$

$$y_1^{(n-1)} v'_1 + y_2^{(n-1)} v'_2 + \dots + y_n^{(n-1)} v'_n = R$$

ثم نجد المحددة  $W[y_1, \dots, y_n]$  ، ونكمل على نفس الطريقة التي تحدثنا عنها آنفا عندما كانت  $n = 2$  فقط . ولعل المثال التالي يعطينا رؤية أسهل وأوضح . وفي كثير من الأحيان يكون من الأسهل حل هذا النظام من المعادلات جبريا للحصول على  $v_k$  ، ثم بالتكامل نحصل على  $v_k$  حيث  $k = 1, \dots, n$  .

مثال ٣ . أوجد الحل العام لما يسمى بمعادلة كوشي - أويلر

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^3 \sin x, \quad x > 0$$

علما بأن المجموعة  $\{x, x^{-1}, x^2\}$  تمثل حلاولا مستقلة خطيا للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة .

الحل : نبدأ أولا بالقسمة على  $x^3$  ( معامل  $y'''$  ) لنحصل على

$$y''' + x^{-1} y'' - 2x^{-2} y' + 2x^{-3} y = \sin x, \quad x > 0$$

ومن ثم يكون الحل الخاص المطلوب على الشكل

$$y_p = x v_1 + x^{-1} v_2 + x^2 v_3 \quad (20)$$

والمطلوب إيجاد  $v_1, v_2, v_3$  . ومن ثم فإن المعادلات المطلوبة حلها هي :

$$x v'_1 + x^{-1} v'_2 + x^2 v'_3 = 0 \quad (21)$$

$$v'_1 - x^{-2} v'_2 + 2x v'_3 = 0 \quad (22)$$

$$2x^{-3} v'_2 + 2v'_3 = \sin x \quad (23)$$

بضرب المعادلة (22) في  $x$  ثم إضافتها إلى (21) نحصل على

$$2v'_1 + 3x v'_3 = 0 \quad (24)$$

وبضرب المعادلة (23) في  $x$  ثم إضافتها إلى ضعف المعادلة (22) نحصل على

$$2v'_1 + 6x v'_3 = x \sin x \quad (25)$$

وبطرح (24) من (25) نجد قيمة  $v_3'$

$$v_3' = \frac{\sin x}{3}$$

وباستعمال (24) نجد  $v_1'$

$$v_1' = -\frac{1}{2}x \sin x$$

ثم نستخدم (23) لإيجاد  $v_2'$

$$v_2' = \frac{1}{6}x^3 \sin x$$

وبالتكامل نجد أن

$$v_1(x) = \frac{1}{2}(x \cos x - \sin x)$$

$$v_2(x) = \frac{1}{6}[-x^3 \cos x + 3(x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x)]$$

$$v_3(x) = -\frac{1}{3} \cos x$$

وبالتالي فالحل الخاص المطلوب كما في المعادلة (20) هو

$$y_p = \frac{1}{6}[3x^2 \cos x - 3x \sin x - x^2 \cos x + 3x \sin x - 6x^{-1} \sin x + 6 \cos x - 2x^2 \cos x] = \cos x - x^{-1} \sin x$$

أما الحل العام للمعادلة فهو

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^2 + \cos x - x^{-1} \sin x$$

ونختتم نقاش هذا البند بمثال يعطينا الحل العام لمعادلة خاصة قد تتكرر

كثيرا في التطبيقات العملية وفي التمارين العامة .

مثال ٤ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = f(x) \quad (26)$$

حيث  $f(x)$  أي دالة قابلة للتكامل على الفترة المطلوب إيجاد الحل عليها ، فمثلا

يكتفى بأن تكون الدالة  $f$  متصلة على فترة الحل  $(a, b)$  ، أو أن تكون نقاط مدم

إتصالها ذات عدد محدود .



الحل : من المعلوم أن البدالتين  $\sin x$  ,  $\cos x$  مستقلتان خطيا , وتمثل كل منهما حلا للمعادلة المتجانسة  $y'' + y = 0$  كما أن  $W[y_1, y_2] = 1$  . وبتطبيق القانون (13) مع ملاحظة أن الحل المطلوب صالح على الفترة  $(a, b)$  نجد أن

$$v_1(x) = \int_a^x -\sin \beta \ f(\beta) d\beta$$

$$v_2(x) = \int_a^x \cos \beta \ f(\beta) d\beta$$

وبالتالي فالحل الخاص هو

$$\begin{aligned} y = y_p &= -\cos x \int_a^x f(\beta) \sin \beta d\beta + \sin x \int_a^x f(\beta) \cos \beta d\beta \\ &= \int_a^x f(\beta) (\sin x \cos \beta - \cos x \sin \beta) d\beta \\ &= \int_a^x f(\beta) \sin (x - \beta) d\beta \end{aligned}$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_a^x f(\beta) \sin (x - \beta) d\beta \quad (27)$$

لاحظ أن  $x$  داخل إشارة التكامل تُعامل كثابت بينما  $\beta$  هي المتغير .

### تمارين

فيما يلي استخدم طريقة تغير الوسطاء لإيجاد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad (D^2 - 1)y = e^x + 1$$

$$(2) \quad (D^2 + 4)y = \tan 2x$$

$$(3) \quad 2y'' - 2y' - 4y = 2e^{3x}$$

$$(4) \quad (D^2 + 1)y = \csc x \cot x$$

$$(5) (D^2 - 2D + 1)y = e^x / x$$

$$(6) y''' + y = \sec^3 x$$

$$(7) y'' + 16y = \sec 4x$$

$$(8) y'' + y = \tan^2 x$$

$$(9) (D^2 + 4)y = \csc^2 2x$$

$$(10) (D^2 + 1)y = \sec^2 x \csc x$$

$$(11) (D^2 - 1)y = 2(1 - e^{-2x})^{-1/2}$$

$$(12) (D - 1)(D - 2)(D - 3)y = e^x$$

$$(13) y''' - 2y'' + y' = x$$

$$(14) (D^3 + 3D^2 - 4)y = e^{2x}$$

$$(15) y''' + y' = \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$$

فيما يلي أوجد حل المعادلة التفاضلية بالاستعانة بحلول المعادلة المتجانسة المعطاة :

$$(16) x^3 y'''' - 3x y' + 3y = x^4 \cos x, \quad x > 0; y_1 = x, y_2 = x^{-1}, y_3 = x^3$$

$$(17) x^3 y'''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^{-1}, \quad x > 0; y_k = x^k, \quad k = 1, 2, 3$$

## ٤-٨ ملخص الباب

مالجنا في هذا الباب بصفة رئيسية المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الرتبة الثانية ، الا أننا ذكرنا في البند الثالث أنه بالإمكان تعميم طريقة تغير الوسطاء إلى معادلات ذات رتب أعلى ، ورسمنا الخطوط العريضة لهذا التعميم ، وكذلك خربنا مثالا لذلك ، كما أدرجنا بعض التمارين المناسبة في نهاية البند المذكور . ولقد كان جل تركيزنا على إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x) \quad (1)$$

من خلال الاستعانة بالمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات العلاقة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

## أولاً : طريقة اختزال الرتبة

وتتم بمعلومية حل واحد غير صفري للمعادلة (2) ، وليكن  $y_1$  ثم نفترض أن الحل الخاص المطلوب هو  $y = v y_1$  حيث  $v$  دالة في  $x$  مطلوب إيجادها . وبإجراء الاشتقاقين الأول والثاني للدالة  $y$  ثم التعميض في (1) ، واستعمال الاختزال  $w = v'$  تتحول المعادلة الناتجة إلى معادلة خطية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة يمكن حلها لإيجاد  $w$  المساوية  $v'$  ، ومن ثم تكامل لإيجاد  $v$  ، وأخيراً نجد  $y = v y_1$  .

## ثانياً : طريقة تغير الوسطاء

وتتم بمعلومية حلين مستقلين خطياً للمعادلة (2) ، وليكونا  $y_1, y_2$  ، ثم نفترض أن الحل المطلوب هو  $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$  إضافة إلى اشتراط أن تكون المعادلة  $v_1 y_1 + v_2 y_2 = 0$  قائمة . وبضم هذا الشرط مع كون  $y$  يحقق المعادلة (1) يتم لنا الحصول على معادلتين جبريتين أنيتين ( انظر النظام (11) ) نجد من خلال حلها أننا الدالتين  $v_1, v_2$  ومن ثم نجد الحل الخاص  $y$  .  
وهذه الطريقة أكثر شمولاً من سابقتها ، وربما كانت أسهل تطبيقاً إذا كان بالإمكان حفظ القانونين (13) الخاصين بإيجاد  $v_1, v_2$  مباشرة دون الغوص في التفاسيل الدقيقة المؤدية إلى القانونين نفسيهما في نهاية المطاف .

## ٥-٨ تمارين هامة

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) (D^2 - 1)y = 2e^{-x} (1 + e^{-2x})^{-2}$$

$$(2) (D^2 + 16)y = \tan 4x$$

$$(3) (4D^2 - 12D + 9)y = e^{4x} + e^{3x}$$

$$(4) (x^2 D^2 + 2x D - 2)y = 6x^{-2} + 3x; y_1 = x, y_2 = x^{-2}, x > 0$$

$$(5) y'' - y = (1 - e^{2x})^{-3/2}$$

$$(6) xy'' + (x-1)y' - y = 0; y_1 = e^{-x}, x > 0$$

$$(7) (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad y_1 = x, \quad -1 < x < 1$$

$$(8) (D^2 + 1)y = \sec^2 x \tan x$$

$$(9) (D^2 - 1)y = 2(1 + e^x)^{-1}$$

$$(10) (D^3 + D)y = \sec^2 x$$

$$(11) y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$$

$$(12) y'' + y = \sec^3 x \tan x$$

$$(13) (D^2 + 4D + 3)y = \sin e^x$$

$$(14) (D^2 + 1)y = \csc^3 x \cot x$$

$$(15) y'' - y = (e^{2x} + 1)^{-1}$$

$$(16) y'' - y = 2(e^x - e^{-x})^{-1}$$

$$(17) xy'' - (x+1)y' + y = x^2; \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = x + 1$$

$$(18) xy'' + (5x-1)y' - 5y = x^2 e^{-5x}; \quad y_1 = 5x - 1, \quad y_2 = e^{-5x}$$

$$(19) y'' + y = \tan x + e^{3x} - 1$$

$$(20) y'' + 4y = \sec^4 2x$$

$$(21) y'' + y = 3 \sec x + 1 - x^2$$

$$(22) \frac{y''}{2} + 2y = \tan 2x - \frac{e^x}{2}$$

$$(23) x^3 y''' - 2x^2 y'' - 5xy' + 5y = x^{-2}, \quad x > 0; \quad y_1 = x, \quad y_2 = x^5, \quad y_3 = x^{-1}$$

$$(24) y'' - y = e^{2x} (3 \tan e^x + e^x \sec^2 e^x)$$

$$(25) y'' - 3y' + 2y = \cos e^{-x}$$

$$(26) (D-1)^2 y = e^{2x} (e^x + 1)^{-2}$$

## الباب التاسع

# حلّول متسلسلات القوى

مقدمة ■ النقاط المادية والنقاط الشاذة ■ حلّول المعادلات قرب نقطة عادية ■ ملخص  
الباب ■ تجايز عامة .



## ١-٩ مقدمة

سبق لنا دراسة عدة طرق مختلفة لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة . وعلمنا أن معالجة المعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الأولى تفضي إلى إيجاد عامل مكامل يؤدي إلى تمام المعادلة ومن ثم حلها . وبالنسبة لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة والتي تزيد رتبته على الواحد ، فقد استعرضنا في الباب السابق طريقة اختزال الرتبة بطريقة تغير الوسطاء ، إلا أن لكل من هاتين الطريقتين بعض القصور الذي قد ينتج عنه استحالة حل المعادلة التفاضلية . فبالنسبة لطريقة اختزال الرتبة قد تواجهنا مشكلة عدم تمكننا من إيجاد التكاملات المطلوبة لتحديد الدالة  $v$  . وكذلك الحال عندما نلجأ إلى طريقة تغير الوسطاء ، فقد نجاب بمشكلة عدم تمكننا من إيجاد التكاملات اللازمة للوصول إلى الدالتين  $v_1, v_2$  .

ولهذا كان اللجوء إلى استعمال متسلسلات القوى للتغلب على هذه المصاعب وبالتالي الوصول إلى حل للمعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة .

وقبل الدخول في عمق الموضوع نسطر بعض التعاريف والحقائق :

power series

١- تعريف متسلسلة القوى

يقال للتعبير الذي على الهيئة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_k (x - x_0)^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

بأنه متسلسلة قوى حول النقطة  $x_0$  حيث  $x$  يرمز لتغير بينما المعاملات الحقيقية  $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$  ثابتة .

ب - تقارب متسلسلة القوى convergence of power series

يقال للمتسلسلة  $\sum a_n (x - x_0)^n$  بأنها متقاربة عند النقطة  $x = r$  إذا وُجد

عدد  $A$  بحيث أن نهاية المتتابعة  $\{A_n\}$  تؤل إليه حيث  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$

ج - فترة التقارب interval of convergence

لكل متسلسلة قوى فترة تقارب . وتعرف فترة التقارب بأنها مجموعة الأعداد التي تتقارب عندها المتسلسلة .

د - التقارب المطلق absolute convergence

يقال لمتسلسلة قوى بأنها تتقارب تقاربا مطلقا عند النقطة  $x = r$  إذا كانت

متسلسلة القوى  $\sum |a_n| |r - x_0|$  متقاربة .

هـ - نصف قطر التقارب radius of convergence

لكل متسلسلة قوى نصف قطر تقارب . ويتم عادة حساب نصف قطر التقارب باستعمال اختبار النسبة ratio test

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0| = l$$

فالمتسلسلة ستتقارب تقاربا مطلقا لجمع قيم  $x$  التي تخفي إلى جعل قيمة النهاية  $l$  أقل من واحد . وبأسلوب أكثر دقة يمكن أن نقول إن نصف قطر التقارب هو مقلوب  $L$  حيث

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

وإذا رمزنا بالحرف  $R$  لنصف قطر التقارب ، فإن

$$R = \frac{1}{L}$$



وعليه فإن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع قيم  $x$  بحيث  $|x - x_0| < R$  ، ولا تتقارب لتلك القيم بحيث  $|x - x_0| > R$  . أما بالنسبة لقيمة  $x$  المحققة للمعادلة  $|x - x_0| = R$  ، فالوضع غير معلوم ويختلف من متسلسلة لأخرى . وعندما تكون  $R = 0$  ، فإن فترة التقارب تتكون من نقطة واحدة هي  $x_0$  . أما عندما  $R = \infty$  ، فإن متسلسلة القوى تتقارب لجميع قيم  $x$  .

و - متسلسلة القوى تمثل دالة متصلة داخل نطاق فترة التقارب .

ز - يمكن اشتقاق متسلسلة القوى حدا حدا داخل نطاق فترة التقارب ، كما يمكن إجراء التكامل عليها حدا حدا داخل نفس النطاق .

ح - يمكن إضافة متسلسلة قوى لأخرى حدا حدا إذا كان لهما فترة تقارب مشتركة .

والآن لننظر إلى المعادلة

$$y' - 2xy = 0 \quad (1)$$

وكما نعلم من الباب الثاني ، فإن الدالة  $y = e^{x^2}$  تعتبر حلاً مباشراً للمعادلة (1) . ولكن من المعروف أن  $e^x$  يمكن وضعها في صورة متسلسلة القوى

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (2)$$

وبالتالي يمكن كتابة الحل المباشر على الصورة

$$y = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad (3)$$

حيث كلا المتسلسلتين (2) ، (3) تتقاربان لجميع قيم  $x$  الحقيقية . وبمعنى آخر ، فإن علمنا بالحل مقدماً مكننا من إيجاد حل للمعادلة التفاضلية على صورة متسلسلة قوى غير منتهية . ولكن هب أننا نريد أن نجد حلاً للمعادلة (1) على صورة متسلسلة قوى بطريقة مباشرة . ولنحاول طريقة مشابهة لتلك التي أطلقنا عليها مسمى " المعاملات غير المعينة " .

لنفترض أنه يُوجد حل على صورة متسلسلة قوى في  $x$  وحول النقطة  $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

والسؤال الطبيعي هنا : هل بإمكاننا إيجاد قيم المعاملات  $a_n$  بحيث أن المتسلسلة المعطاة بالمعادلة (4) تتقارب إلى دالة تحقق المعادلة (1) ؟ وربما بدأ الجواب بمحاولة التعويض من (4) في (1) . ولنبدأ بمفاضلة (4) حدا حدا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

وبالتعويض في (1) يتضح لدينا أن

$$y' - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \quad (5)$$

وهنا نحتاج إلى جمع المتسلسلتين في (5)، ولنتم لنا ذلك لا بد من توحيد ترقيم الجمع لكلا المتسلسلتين ، أي أن تكون بداية الترقيمين متماثلة . كما أنه من المرفوب جداً - إن أمكن - توحيد القيم العددية لقوى  $x$  ، فمثلاً لو كان الحد الأول في إحدى المتسلسلتين يساوي ثابتاً في  $x$  ، فإننا نرغب أن يكون الحد الأول في المتسلسلة الأخرى كذلك محتوياً على  $x$  أيضاً . وهنا نعيد كتابة (5) على النحو

$$y' - 2xy = 1 \cdot a_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \quad (6)$$

وإذا تذكرنا أن ترقيم الجمع ما هو الا وسيط جامد يشبه تماماً متغير التكامل في التكامل المحدود ، فإن بإمكاننا إجراء التبديل التالي على ترقيم الجمع في كل من المتسلسلتين في (6) : بالنسبة للمتسلسلة الأولى نضع  $k = n - 1$  ، وبالنسبة للثانية  $k = n + 1$  . وبذلك يصبح الطرف الأيمن من (6) مساوياً

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1} x^k$$

وبجمع المتسلسلتين حدا حدا ينتج لدينا

$$y' - 2xy = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1}]x^k = 0 \quad (7)$$

وحتى تكون (7) مطابقة للصفر ، فإن جميع المعاملات يجب أن تكون مساوية للصفر ، أي أن

$$a_1 = 0$$

$$(k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

وهكذا فإن المعادلة (8) تمثل علاقة تكرارية تحدد قيم  $a_k$  ، وحيث أن  $k+1$  تختلف من الصفر لجميع قيم  $k$  المذكورة ، فإنه يمكن إعادة كتابة (8) على النحو

$$a_{k+1} = \frac{2a_{k-1}}{k+1} \quad (9)$$

وبتكرار هذه الصيغة الأخيرة نحصل على التالي

$$k=1, \quad a_2 = \frac{2a_0}{2} = a_0$$

$$k=2, \quad a_3 = \frac{2a_1}{3} = 0$$

$$k=3, \quad a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2!}$$

$$k=4, \quad a_5 = \frac{2a_3}{5} = 0$$

$$k=5, \quad a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{a_0}{6} = \frac{a_0}{3!}$$

$$k=6, \quad a_7 = \frac{2a_5}{7} = 0$$

$$k=7, \quad a_8 = \frac{2a_6}{8} = \frac{a_0}{4 \cdot 3!} = \frac{a_0}{4!}$$

وهكذا نرى أن  $a_{2k+1} = 0$  وعموماً فإن

$$a_{2k} = \frac{a_0}{k!}$$

بينما

$$a_{2k+1} = 0$$

حيث  $k = 1, 2, \dots$  . وبالتعويض في إفتراضنا الأصلي (4) ، نجد أن

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\
 &= a_0 + 0 + \frac{a_0}{1!} x^2 + 0 + \frac{a_0}{2!} x^4 + \dots \\
 &= a_0 \left[ 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right] \\
 &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad (10)
 \end{aligned}$$

وحيث أن التكرار في (4) ترك قيمة  $a_0$  اختيارية غير محددة ، فإننا نكون بذلك قد وجدنا الحل العام للمعادلة (1) .

## ٢-٩ النقاط الحادية والنقاط الشاذة

تعريف. لتكن لدينا المعادلة التفاضلية ذات الرتبة  $n$

$$b_0(x) y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + \dots + b_n(x) y = R(x) \quad (1)$$

إذا كانت قيمة الدالة  $b_0(x)$  عند النقطة  $x_0$  لا تساوي الصفر ( $b_0(x_0) \neq 0$ ) ، عندها يقال بأن  $x_0$  نقطة عادية للمعادلة (1) . أما إذا كانت  $b_0(x_0) = 0$  ، فإن  $x_0$  تعتبر نقطة شاذة للمعادلة (1) .

هذا وسنفترض في هذا الباب أن المعاملات  $b_0, b_1, \dots, b_n$  في المعادلة (1) جميعها كثيرات حدود ، وذلك للتيسير والتبسيط فقط . أما المعاملات التي تكون على صورة دوال تحليلية  $\text{analytic functions}$  ، أي تلك التي يمكن كتابتها على هيئة متسلسلة قوى حول نقطة ما ، فإن طريقة الحل والنتائج المتوقعة فتتخلل كما هي تقريبا دون تغيير كبير يذكر .

وفي هذا البند سنتناول حلول متسلسلات القوي حول نقطة عادية للمعادلة الخطية ( 1 ) ، ولن نتعرض لهذه الحلول حول نقاط شاذة للمعادلة ( 1 ) . وكقاعدة عامة ، فإننا عند التحدث عن النقاط الشاذة للمعادلة ( 1 ) ، فإننا نعني بها النقاط الشاذة في المستوى المركب المحدود أو المستوى المحدود إختصاراً ، وليس في اللانهاية .

مثال ١ . للمعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)y'' - 3xy' - 2y = 0$$

نقطتان شاذتان هما  $x = 1, x = -1$  الممثلتان في الواقع لجذري المعادلة

$$1-x^2 = 0$$

$$xy'' + xy' - y = 0$$

نقطة شاذة واحدة هي  $x = 0$  . أما المعادلة التفاضلية

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

فليس لها نقاط شاذة في المستوى المحدود .

تمارين

فيما يلي أوجد النقاط الشاذة لكل معادلة في المستوى المحدود :

$$(1) \quad (x^2+4)y'' + 2xy' - 3y = 0$$

$$(2) \quad 2x(1-x)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$$

$$(3) \quad x^2y'' + 2xy' - 4y = 0$$

$$(4) \quad (1+x^2)y'' - y = 0$$

$$(5) \quad 5xy'' - x^2y' + y = 0$$

$$(6) \quad 3y'' + y = 0$$

$$(7) \quad x^3(x^2+1)y'' - xy' + 2y = 0$$

$$(8) \quad (2x+1)(x-2)y'' + (x^2-3)xy' - xy = 0$$

$$(9) \quad (x^2-3x+2)y'' + (x^3-1)y' + 2xy = 0$$

$$(10) \quad (x^2+2x+2)y'' + x^2y' - 5xy = 0$$

$$(11) \quad (x^2 - 5x - 6)y'' - 2y' + xy = 0$$

$$(12) \quad (x^3 - 1)y'' + x^2y' + y = 0$$

$$(13) \quad x(x^2 + 9)^2y'' - 2x^2y' + 4y = 0$$

$$(14) \quad x^4y'' - y = 0$$

$$(15) \quad (3x - 1)y'' + 3xy' - y = 0$$

### ٣-٩ حلول المعادلات قرب نقطة عابية

قبل أن نشرع في سرد الخطوات والأمثلة يجدر بنا هنا أن نذكر نحن نظرية هامة دون برهان ، ذلك أن البرهان معقد وطويل ويوجد عادة في الكتب المتقدمة لمادة المعادلات التفاضلية .

نظرية وجود الحل . إذا كانت النقطة  $x_0 = 0$  نقطة عابية للمعادلة التفاضلية

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0 \quad (1)$$

فإنه يمكن إيجاد متسلسلتي قوى مختلفتين على الهيئة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2)$$

بحيث تمثل كل منهما حلا مستقلا للمعادلة (1) . وتتقارب كلا المتسلسلتين على الأقل لجميع قيم  $x$  المققة للمراجعة أو المتباينة  $|x| < R$  حيث  $R$  هي المسافة بين نقطة الأصل وأقرب نقطة شاذة .

ولكي نحل المعادلة (1) يتوجب علينا إيجاد مجموعتين مختلفتين من المعاملات التي تتحدد قيمها بدلالة ثابتين اختياريين اثنين فقط ، وبالتالي ينتج لدينا متسلسلتا قوى مستقلتان خطيا  $y_1(x), y_2(x)$  كلاهما معروف حول نفس النقطة العابية . أما الخطوات المتبعة لحل المعادلة (1) ذات الرتبة الثانية فتشبه تلك الخطوات التي مرورنا بها في البند ١-٩ لحل المعادلة الخطية  $y' - 2xy = 0$ .

وبالتحديد ، فإننا نبدأ بافتراض وجود حل على هيئة متسلسلة القوى

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ومن ثم نعمل على إيجاد قيم المعاملات  $a_n$  حتى نجد المتسلسلة  $y$  نفسها . وفي الواقع فإننا سنخلص في النهاية إلى وجود ثابتين اختياريين فقط هما  $a_0, a_1$  . أما باقي المعاملات فستحدد قيمها بدلالة هذين الثابتين  $a_0, a_1$  .

مثال ١ . حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - y = 0 \quad (3)$$

قرب النقطة العادية  $x_0 = 0$

الحل : من الواضح أن المعادلة (3) ليس لها نقاط شاذة في المستوى المحدود . ولذلك فإنه طبقاً للنظرية السابقة يوجد حل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

صالح لجميع قيم  $x$  الحقيقية . ولكي نجد  $y$  يجب أن نجد قيم المعاملات  $a_n$  لجميع قيم  $n$  الأكبر من الواحد وبدلالة الثابتين الاختياريين  $a_0, a_1$  . بالتعويض من (4) في المعادلة (3) ينتج لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (5)$$

نقوم الآن بتغيير ترتيب الجمع في المتسلسلة الثانية من المعادلة (5) بحيث تشمل المتسلسلة على المقدار  $x^{n-2}$  في هذا العام ، ومن ثم نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0 \quad (6)$$

وبإضافة المتسلسلتين إلى بعضهما نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n - a_{n-2}] x^{n-2} = 0 \quad (7)$$

مع ملاحظة أن قيمة كل من الحدين الأوليين في المتسلسلة الأولى تساوي صفرا . ولكي تتحقق المعادلة (7) لا بد أن يكون كل معامل في المتسلسلة مساويا للصفر ، ومن ثم يجب تحقق المعادلة التالية لكل قيمة من قيم  $n$  المساوية أو الأكبر من اثنين

$$n(n-1)a_n - a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

ويمكننا إعادة كتابة هذه العلاقة التكرارية على الصيغة

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}, \quad n \geq 2 \quad (8)$$

ومن ثم نوظف هذه العلاقة (8) لإيجاد قيمة  $a_n$  حيث  $n \geq 2$  وبمعلومية  $a_0, a_1$  اللذين افترضنا أنهما اختياريان . وبذا يكون لدينا

$$a_2 = \frac{a_0}{2 \cdot 1} = \frac{a_0}{2!}, \quad a_3 = \frac{a_1}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, \quad a_5 = \frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_6 = \frac{a_4}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6!}, \quad a_7 = \frac{a_5}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7!}$$

ومن ثم نجد أن

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!}, \quad k \geq 1 \quad (9)$$

وكذلك

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!}, \quad k \geq 1 \quad (10)$$

ومن الطبيعي الآن أن نموض بالعلاقتين (9)، (10) عن قيم المعاملات  $a_n$  في الصيغة المفترضة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

وبحيث أن لدينا علاقتين مختلفتين لتحديد كل من  $a_{2k}$ ،  $a_{2k+1}$  فسنعيد كتابة (4)



على النحو التالي

$$y = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

ومن ثم نستعين بالعلاقين (9)، (10) لنحصل على الحل العام للمعادلة (3) وهو

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (11)$$

حيث  $a_0, a_1$  ثابتان اختياريان . وعند اختيارنا للقيمتين  $a_0 = a_1 = 1$  ، فإننا نحصل على الحل الخاص

$$y_1 = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

أما اختيارنا للقيمتين  $a_1 = -1, a_0 = 1$  فيعطينا الحل الخاص

$$y_2 = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) - \left(x + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$$

وهي نتيجة كان يمكن الحصول عليها بمجرد الإطلاع على المعادلة (3) وإيجاد حلها العام باتباع طريقة الباب السادس حيث المعادلة المساعدة  $m^2 - 1 = 0$  تعطينا الحل العام

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x^2 + 4)y'' + 6xy' + 4y = 0 \quad (13)$$

بالقرب من النقطة العادية  $x_0 = 0$ .

الحل : للمعادلة (13) نقطتان شاذتان في المستوى الحدود هما  $2i, -2i$  ، ولذلك

فنحن نعلم أن لهذه المعادلة حلا على الصيغة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (14)$$

صالحا لجميع قيم  $x$  حيث القيمة المطلقة لـ  $x$  أقل من 2 ( $|x| < 2$ ) . ولكي نجد قيم المعاملات  $a_n$  حيث  $n > 1$  ، فإننا نعوض عن  $y$  ومشتقاتها من (14) في المعادلة (13) لنحصل على

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} 6n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0 \end{aligned}$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4) a_n x^n = 0 \quad (15)$$

وبتحليل معاملات المتسلسلة الثانية ، وملاحظة أن كل من الحدين الأول والثاني في المتسلسلة الأولى يساوي الصفر ، نصل إلى

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4) a_n x^n = 0$$

وبإعادة ترقيم الجمع للمتسلسلة الثانية لتبدأ من  $n=2$  نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) a_{n-2} x^{n-2} = 0 \quad (16)$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty} [4n(n-1) a_n + (n-1)(n+2) a_{n-2}] x^{n-2} \quad (17)$$

ولكي نتحقق (17) فلا بد من أن يكون كل معامل مسارٍ للصفر ، أي أن تكون

$$4n(n-1) a_n + (n-1)(n+2) a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \quad (18)$$

حيث  $a_0, a_1$  ثوابت اختيارية كما هو متوقع . أما بقية المعاملات فيمكن إيجادها عن طريق المعادلة (18) . وحيث أن

$$n(n-1) \neq 0, \quad n \geq 2$$

فيتمكننا أن نخلص إلى العلاقة التكرارية

$$a_n = -\frac{n+2}{4n} a_{n-2} \quad (19)$$

وكما فعلنا في المثال السابق فإنه من المفيد أن نرتب العلاقات المتكررة في (19) في عمودين مختلفين ، ذلك لأن ترقيم الجمع الأيسر يختلف عن الأيمن باثنين فقط ، ومن ثم يكون لدينا العمودان

$$\begin{array}{ll} a_2 = -\frac{4}{8} a_0 & a_3 = -\frac{5}{12} a_1 \\ a_4 = -\frac{6}{16} a_2 & a_5 = -\frac{7}{20} a_3 \\ a_6 = -\frac{8}{24} a_4 & a_7 = -\frac{9}{28} a_5 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$a_{2k} = -\frac{(2k+2)}{8k} a_{2k-2} , \quad a_{2k+1} = -\frac{(2k+3)}{4(2k+1)} a_{2k-1}$$

ويضرب عناصر العمود الأيسر في بعضها البعض فننتهي إلى

$$a_2 a_4 a_6 \dots a_{2k} = (-1)^k \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2k+2)}{8 \cdot 16 \cdot 24 \dots (8k)} a_0 a_2 \dots a_{2k-2}$$

وبعد التبسيط والاختصار نجد أن

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^k \frac{2^k (k+1)!}{2^{2k} 2^k k!} a_0 \\ &= (-1)^k \frac{(k+1)}{2^{2k}} a_0, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة تضرب عناصر العمود الأيمن في بعضها البعض فننتهي إلى القانون

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k+3)}{3 \cdot 2^k} a_1, \quad k \geq 1$$

وبالتعميم في (14) نجد أن الحل العام للمعادلة (13) على الفترة  $(-2, 2)$  هو

$$y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)}{2^{2k}} x^{2k} \right] + \frac{a_1}{3} \left[ 3x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+3)}{2^{2k}} x^{2k+1} \right]$$

مثال ٤. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - (x+1)y' - y = 0 \quad (20)$$

حول النقطة العادية  $x_0 = -1$ .

الحل : وكما أشرنا سابقا فإن هدفنا من إيجاد حل حول النقطة  $x_0 = -1$  ، يعني إيجاد حل على هيئة متسلسلة قوى يشتمل كل حد منها على أس صحيح للمقدار  $x - x_0$  أو  $x + 1$  في حالتنا هذه . وعلى هذا الحل أن يكون صالحا في منطقة مجاورة للنقطة  $x_0$  ومشتملة عليها كمثل الفترة التي يقع مركزها في  $x_0$  ، ولها نصف قطر موجب .

وأول ما نبدأ به الحل هو ازالة محوري المستوى باختيار  $v = x + 1$  لتصبح

المعادلة (20) على النحو

$$\frac{d^2 y}{dv^2} - v \frac{dy}{dv} - y = 0 \quad (21)$$

ومن ثم نقرر أن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n \quad (22)$$

وبالتعميم في (21) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n v^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n v^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n = 0 \quad (23)$$

وبإزالة تجميع الجمع ننتهي إلى

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n v^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-2} v^{n-2} = 0$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n - (n-1)a_{n-2}] v^{n-2} = 0$$

ومن ثم ننتهي إلى القانون

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n}, \quad n \geq 2 \quad (24)$$

ويوضع العلاقة التكرارية (24) في عمودين نحصل على

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \quad a_3 = \frac{a_1}{3}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4} \quad a_5 = \frac{a_3}{5}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$a_{2k} = \frac{a_{2k-2}}{2k} \quad a_{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{2k+1}$$

ويضرب عناصر كل عمود في بعضها البعض نحصل على العلاقتين

$$a_{2k} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} = \frac{a_0}{2^k k!}, \quad k \geq 1$$

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)} = \frac{2^k k!}{(2k+1)!} a_1, \quad k \geq 1$$

وبالتالي فالحل المطلوب للمعادلة (21) هو

$$y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{2k}}{2^k k!} \right] + a_1 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!} v^{2k+1} \right]$$

وحيث أن  $v = x + 1$  ، فإن الحل العام للمعادلة (20) هو

$$y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k}}{2^k k!} \right] + a_1 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!} (x+1)^{2k+1} \right]$$

وهكذا قدمنا للقارئ ثلاثة أمثلة مختلفة في هيئة المعادلة التفاضلية ، ففي المثال الأول كانت المعادلة التفاضلية ذات معاملات ثابتة ولم تكن لها نقاط شاذة ، بينما كان للمعادلة التفاضلية في المثال الثاني معاملان غير ثابتين أحدهما للحد ذي الرتبة العليا  $y''$  ، وكان لها أيضا نقطتان شاذتان في المستوى المحدود . أما المثال الثالث فاشتمل على معادلة كان المتغير فيها معامل الحد الأوسط  $y'$  ولم تكن لها هي الأخرى نقاط شاذة ، وكان المطلوب إيجاد صيغة المتسلسلة حول النقطة  $x = -1$  على عكس المثالين الأولين اللذين تناولا نقطة الأصل كنقطة لإيجاد صيغة المتسلسلة حولها . وفي الأمثلة الثلاثة السابقة تم استخدام العلاقة التكرارية بنفس الطريقة لإيجاد العلاقة التي تربط بين  $a_k$  وكلا من  $a_1$  ،  $a_0$  وذلك عن طريق ضرب عناصر العمود في بعضها البعض . وهذه الطريقة قد لا تجدي أحيانا . وفيما يلي مثالا يوضح هذه الملاحظة .

مثال ٤ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + (x-1)y' + y = 0 \quad (25)$$

حول النقطة العادية  $x_0 = 0$  .

الحل : كما سبق فإن  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  . بالتعويض في (25) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

وبإضافة ترقيم الجمع كما فعلنا في الأمثلة السابقة ننتهي إلى المعادلة

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) a_n - (n-1) a_{n-1} + (n-1) a_{n-2}] x^{n-2} = 0$$

ومن ثم نحصل على العلاقة التكرارية

$$a_n = \frac{1}{n} (a_{n-1} - a_{n-2}), \quad n \geq 2$$

حيث  $a_0$  ،  $a_1$  ثوابت اختيارية . هذا ويمكن إيجاد قيم  $a_n$  بدلالة  $a_0$  ،  $a_1$  عن

طريق الترميز المباشر . فمثلا

$$a_2 = \frac{1}{2} (a_1 - a_0)$$

بينما

$$a_3 = \frac{1}{3} (a_2 - a_1) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (a_1 - a_0) - a_1 \right] = -\frac{1}{6} (a_1 + a_0)$$

وهكذا يتضح لنا أن الطريقة العامة لإيجاد معاملات المتسلسلة قد تختلف من طريقة الأمثلة الثلاثة السابقة كما أسلفنا .

وأخيرا نشير من بعيد إلى حل متسلسلة القوى لمعادلة تفاضلية متجانسة ذات رتبة أعلى من اثنين . فالزيادة هنا لا تعني أي جديد في خطوات حل المعادلة ، وإنما تعني مزيدا من العمليات الجبرية ومزيدا من الحاجة إلى الدقة في متابعة تغيير ترميزات الجمع ، كما تعني بالطبع زيادة عدد الثوابت الاختيارية ليصبح عددها مساويا لرتبة المعادلة . وسنكتفي هنا بذكر نص المثال التالي وكتابة الجواب النهائي المطلوب على أن نترك تفاصيل الحل للقارئ .

مثال ٥ . أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''' + x^2 y'' + 5x y' + 3y = 0$$

الحل : سنكتفي كما أشرنا قبل قليل بتسطير الجواب النهائي دون تفصيل ، وهو على النحو التالي

$$y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3k-1)} \right] + a_1 \left[ x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3^k k!} \right] \\ + a_2 \left[ x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+2}}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3k+1)} \right]$$

وهو حل قرب النقطة  $x_0 = 0$  وصالح لجمع قيم  $x$  الحقيقية المحدودة .

أما إذا كانت المعادلة غير متجانسة ، وكان الطرف الأيمن متسلسلة قوى ، فإن الأمر لن يزداد سوءاً إلى حد كبير ، وإنما هي نفس الخطوات ، لكن بدلاً من مساواة كل معامل في المتسلسلة النهائية بالصفر ، فإن الوضع هنا يتطلب مساواة كل معامل في المتسلسلة التي في الطرف الأيسر لتظهيره في الطرف الأيمن . ومن ثم إكمال الخطوات الجبرية المتبقية لاستخراج الحل الخاص المطلوب . أما الدالة المكملة فهي كما هو معروف ناتجة من حل المعادلة المتجانسة ذات العلاقة ، وفيما يلي مثال لمعادلة تفاضلية غير متجانسة مع حلها العام في صورته النهائية .

مثال ٦. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' + xy' + 3y = x^2$$

الحل : الجواب النهائي هو

$$y = \frac{1}{5} \left( x^2 - \frac{2}{3} \right) + a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{2^k k!} x^{2k} \\ + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{1.3.5 \dots (2k+1)} x^{2k+1}$$

وهو حل صالح لجميع قيم  $x$  المحدودة .

## ٩-٤ ملخص الباب

يُعتبر هذا الباب امتداداً للباب الذي سبقه من حيث تناوله للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة ، إلا أنه أكثر تعقيداً وأضمن وصولاً إلى الحل المطلوب . ففي مقدمة الباب أعطينا ملخصاً موجزاً عن أهم خواص متسلسلات القوى ذات العلاقة بموضوع الباب ، كما أعطينا مثالا مبسطاً يزيل بعض الغموض الذي قد يعلق بذهن القارئ في تلك المرحلة .



وفي البند الثاني ذكرنا تعريف النقاط العابية والنقاط الشاذة لمعادلة تفاضلية من الرتبة  $n$  . ولذكروا أن حل تركيزنا سيكون على إيجاد حلول متسلسلات القوى قرب نقطة الأصل ، واقتصرنا أن جميع المعاملات ستكون كثيرات حدود بالنسبة لهذا الباب . ويمكننا إعادة تسطير الجملتين السابقتين فنقول بأن النقطة  $x_0 = 0$  هي نقطة مادية للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0 \quad (1)$$

إذا كانت  $b_0(0) \neq 0$  وكانت المعاملات  $b_0, b_1, b_2$  كثيرات حدود غير قابلة للقسمة على عامل مشترك .

وفي البند الثالث ذكرنا بأن حل للمعادلة (1) لابد أن يكون على هيئة متسلسلة القوى

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

ولكي نجد  $y$  لابد أن نجد المعاملات  $a_n$  ، وذلك بالتعويض المباشر في (1) . وبعد إجراء العمليات الجبرية الملائمة نحصل على علاقة تكرارية ناتجة عن مساواة المعامل النهائي للمقدار  $x^k$  بالصفر . وبتكرار هذه العلاقة التكرارية نجد أن المعاملات تتعين بدلالة ثابتين اختياريين فقط هما  $a_0, a_1$  ، وبالتالي ننتهي إلى حلين مستقلين خطياً  $y_1, y_2$  يمثل كلا منهما متسلسلة قوى تتقارب لجميع قيم  $x$  الواقعة داخل الفترة  $(-R, R)$  حيث  $R$  المسافة من نقطة الأصل إلى أقرب نقطة شاذة للمعادلة .

## ٩-٥ تمارين عامة

...

أوجد لكل من المعادلات التفاضلية التالية حل متسلسلة القوى بالقرب من نقطة

الأصل ، وحدد منطقة صلاحية الحل :

$$(1) \quad y' - x^2 y = 0$$

$$(2) \quad y'' - y' = 0$$

$$(3) \quad (1-x)y' - y = 0$$

$$(4) \quad y'' - xy = 0$$

$$(5) \quad y'' + y = 0 \quad (6) \quad y'' + 3xy' + 3y = 0$$

$$(7) \quad y'' - x y' + 4y = 0 \quad (8) \quad (x - 1)y'' + y' = 0$$

$$(9) \quad (4x^2 + 1)y'' - 8y = 0$$

$$(10) \quad (1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$$

$$(11) \quad (1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$$

$$(12) \quad (1 + x^2)y'' + 10xy' + 20y = 0$$

$$(13) \quad (x^2 + 4)y'' + 2xy' - 12y = 0$$

$$(14) \quad y'' + 2xy' + 5y = 0$$

$$(15) \quad (1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$$

$$(16) \quad (x^2 - 9)y'' + 3xy' - 3y = 0$$

$$(17) \quad 2y'' + xy' - 4y = 0$$

$$(18) \quad (4x^2 - 1)y'' - 6xy' + 4y = 0$$

$$(19) \quad (1 + 2x^2)y'' + 3xy' - 3y = 0$$

$$(20) \quad (1 + 2x^2)y'' - 5xy' + 3y = 0$$

$$(21) \quad \text{أوجد حلا للمعادلة } y'' + (x - 2)y = 0 \text{ بالقرب من النقطة } x = 2$$

$$(22) \quad \text{أوجد حلا للمعادلة التفاضلية } y'' + (1 - x)^2 y' + 4(1 - x)y = 0 \text{ حول النقطة } x = -1$$

$$(23) \quad \text{أوجد حلا للمعادلة التفاضلية } (x^2 + 2x - 2)y'' - 4(x + 1)y' + 6y = 0 \text{ حول النقطة } x = -1$$

$$(24) \quad \text{أوجد حلا للمعادلة التفاضلية } y'' + xy = 2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \text{ حول النقطة } x_0 = 0$$

$$(25) \quad \text{أوجد حلا للمعادلة التفاضلية } y'' - xy' + y = 0 \text{ حول النقطة } x_0 = 0$$

أوجد حلول المعادلتين التاليتين باستعمال متسلسلات القوى المحققة للشروط الابتدائية المعطاة :

$$(26) \quad (x - 1)y'' - xy' + y = 0; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

$$(27) \quad y'' - 2xy' + 8y = 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

## الباب العاشر

# الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية

مقدمة ■ طريقة الحذف الأول ■ حلول الأنظمة ذات المعاملات المتغيرة من الرتبة  
الأولى ■ ملخص الباب .



## ١-١ مقدمة

في هذا الباب القصير نوعاً ما ، سنتناول الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة . ونعني بالنظام الخطي هنا ، النظام المكون من معادلتين تفاضليتين أو أكثر . وغالباً ما تحتوي كل معادلة على أكثر من دالة تابعة لنفس المتغير  $x$  . أما عدد الدوال المجهولة فيساوي عدد المعادلات التفاضلية التي يتكون منها النظام . والمطلوب عادة إيجاد حل يحقق النظام أينما ، أي يحقق جميع المعادلات التفاضلية في نفس الوقت .

مثال ١ . المعادلتان التفاضليتان الآتيتان

$$y' - 3y + v' - v = 5$$

$$2y' - y + v'' - 2v = x$$

تمثلان نظاماً خطياً حيث  $x$  هو المتغير المستقل بينما  $y, v$  المتغيران التابعان للمتغير  $x$  . لاحظ أن المطلوب هو إيجاد المجهولين  $y, v$  كدوال تابعة للمتغير  $x$  ، وأن هذين المجهولين يجب أن يحققا المعادلتين أعلاه في نفس الوقت .

مثال ٢ . مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية

$$y'' - 3y' + u' - v = e^x$$

$$y' - u'' + 2u - v' = x$$

$$v'' - 2y + u' - u = -2$$

تمثل نظاماً خطياً يشمل المتغير المستقل  $x$  والمتغيرات التابعة  $y, u, v$  .

ولسهولة التعامل مع النظام الخطي المكون من معادلتين فقط ، فإننا سنتناول في الفصلين التاليين هذا النظام فقط ، ولكن يمكن تطبيق نفس الخطوات لتشمل الأنظمة الأخرى ذات العدد الأكبر من المعادلات .

### ١-٢ طريقة الحذف الأولي

وهي تشبى إلى حد كبير طريقة الحذف الأولي المستعملة في حل المعادلات الجبرية الخطية الأنية في أكثر من مجهول ، إلا أن الأمر يتطلب دقة أكبر هنا بسبب الاشتقاقات المختلفة لكل متغير . أما الهدف الأساسي فهو السعي إلى التخلص من المتغيرات التابعة كلها إلا واحداً تضمه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة يسهل إيجاد حلها بالطرق المختلفة التي درسناها سابقاً سواء كانت المعادلة متجانسة أم لم تكن .

وفيما يلي نستعرض بالتفصيل خطوات حل أحد هذه الأنظمة الخطية باستعمال طريقة الحذف الأولي مما سيساهم على استيعاب مادة هذا الباب .

مثال ١ . لنفترض أننا نسمى لإيجاد حل للنظام الخطي

$$\begin{aligned} y'' + y - 2v' &= 2x \\ 2y' - y + v' - 2v &= 7 \end{aligned} \quad (1)$$

حيث  $x$  هو المتغير المستقل بينما  $y, v$  متغيران تابعان . لنعد كتابة (1)

باستعمال المؤثرات التفاضلية  $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$  لنحصل على

$$\begin{aligned} (D^2 + 1)y - 2Dv &= 2x \\ (2D - 1)y + (D - 2)v &= 7 \end{aligned} \quad (2)$$

والآن لنحاول التخلص من أحد المتغيرات التابعة لننتهي إلى معادلة واحدة في المتغير الآخر . ولنبدأ بالتخلص من  $v$  وذلك بالتأثير على المعادلة الأولى بالمؤثر  $D - 2$  والتأثير على الثانية بالمؤثر  $2D$  مع تذكر أن عملية التأثير بواسطة المؤثرات التفاضلية عملية تبادلية لأن المعاملات ثابتة . إذا

$$\begin{aligned}(D^2 + 1)(D - 2)y - 2D(D - 2)v &= (D - 2)(2x) = 2 - 4x \\ 2D(2D - 1)y + 2D(D - 2)v &= 2D(7) = 0\end{aligned}$$

وبالجمع نحصل على المعادلة غير المتجانسة

$$[(D^2 + 1)(D - 2) + 2D(2D - 1)]y = 2 - 4x$$

أو

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = 2 - 4x \quad (3)$$

وبطريقة ماثلة يمكن التخلص من  $y$  لنحصل على

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)v = 3 + 2x \quad (4)$$

ومن المعادلتين (3)، (4) نحصل فوراً على

$$y = 2x - 2 + a_1 e^x + a_2 e^{-x} + a_3 e^{-2x} \quad (5)$$

و

$$v = -x - 1 + b_1 e^x + b_2 e^{-x} + b_3 e^{-2x} \quad (6)$$

ويتبقى علينا اختيار الثوابت الاختيارية  $a_i, b_i$  حيث  $i = 1, 2, 3$  وبمحيث تتحقق المعادلات الأصلية المكونة للنظام (1)، فلا يكفي تحقيق المعادلتين (3)، (4)، الناتجتين من المعادلتين الأصليتين بعد إكمال خطوات الحذف الأولى .

ولكي نكمل المطلوب فإننا نجد باستعمال (5) الاشتقاقين الأول والثاني للدالة  $y$ ، وكذلك نجد مشتقة الدالة  $v$  باستعمال (6)، ومن ثم نقوم بالتعويض عن

هذه الدوال ومشتقاتها في المعادلة الأولى من (2) لنحصل على المطابقة

$$\begin{aligned}2x - 2 + 2a_1 e^x + 2a_2 e^{-x} + 5a_3 e^{-2x} \\ - 2(-1 + b_1 e^x - b_2 e^{-x} - 2b_3 e^{-2x}) = 2x\end{aligned} \quad (7)$$

وهذا يعني تحقق المعادلات الخطية الثلاث التالية

$$\begin{aligned}2a_1 - 2b_1 &= 0 \\ 2a_2 + 2b_2 &= 0 \\ 5a_3 + 4b_3 &= 0\end{aligned} \quad (8)$$

وبالتالي ينتج لدينا أن

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = -a_2, \quad b_3 = \frac{-5a_3}{4}$$

هذا ويمكن الحصول على نفس النتيجة بالتعويض في المعادلة الثانية من النظام

(2) . ومن ثم فمجموعة حلول النظام (2) هي

$$\begin{aligned} y &= 2x - 2 + a_1 e^x + a_2 e^{-x} + a_3 e^{-2x} \\ v &= -x - 1 + a_1 e^x - a_2 e^{-x} - \frac{5}{4} a_3 e^{-2x} \end{aligned} \quad (9)$$

وهناك طريقة أخرى لمعالجة النظام (2) تتلخص في إيجاد المعادلة (3) ومن

ثم إيجاد  $y$  كما في المعادلة (5) . أما الخطوة التالية فهي إيجاد معادلة تعطي  $v$

بمعلومية  $y$  ، أي أننا نسمى لنزيل من النظام (2) جميع الحدود التي تحتوي على أي

مشتقة للدالة  $v$  . فمثلا لو ضربنا المعادلة الثانية من النظام (2) في 2 ثم أضفناها

إلى المعادلة الأولى لانتبهنا إلى

$$(D^2 + 4D - 1)y - 4v = 2x + 14$$

أو

$$v = \frac{1}{4} [(D^2 + 4D - 1)y - 2x - 14]$$

وبالتعويض عن  $v$  من (5) نحصل مباشرة على (9) كما هو مطلوب .

### تمارين

استخدم طريقة المذف الأولي لإيجاد حلول للأنظمة الخطية التالية :

$$(1) \quad u' = 4u - v$$

$$v' = -4u + 4v$$

$$(2) \quad v' + y' + 2y = 0$$

$$v' - 3v - 2y = 0$$

$$(3) \quad u' = 2u - v$$

$$v' = u$$

$$(4) \quad y' = 2y + z$$

$$z' = -4y + 2z$$



$$(5) \quad v' = -y + x$$

$$y' = v - x$$

$$(6) \quad w' = w - y - z$$

$$y' = y + 3z$$

$$z' = 3y + z$$

$$(7) \quad x' = 3x - y - 1$$

$$y' = x + y + 4e^t$$

$$(8) \quad (D^2 + 5)v - 2y = 0$$

$$-2v + (D^2 + 2)y = 0$$

$$(9) \quad x'' = 4y + e^t$$

$$y'' = 4x - e^t$$

$$(10) \quad 2(D+1)y + (D-1)w = x + 1$$

$$(D+3)y + (D+1)w = 4x + 14$$

$$(11) \quad 2Dx + (D-1)y = t$$

$$Dx + Dy = t^2$$

$$(12) \quad (D+1)y + (D-4)v = 6 \cos x$$

$$(D-1)y + (D^2+4)v = -6 \sin x$$

$$(13) \quad y'' - y + 5v'' = x$$

$$2y' - v'' + 4v = 2$$

$$(14) \quad Dx = y$$

$$Dz = x$$

$$(15) \quad 2u' + v' - v + w' + 2w = 0$$

$$u' + 2u + 2v' - 3v - w' + 6w = 0$$

$$2u' - v' - 3v - w' = 0$$

$$(16) \quad x' - 6y = 0$$

$$x - y' + z = 0$$

$$x + y - z' = 0$$

$$(17) \quad y'' + v' - v = 0$$

$$y' + 3y + v' - 4v + 3w = 0$$

$$2y' - y + w' - w = 0$$

### ٣-١. حلول الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة من الرتبة الأولى

لن نتناول بالتفصيل هذا البند ، وإنما سنشير من يعيد إلى أهم الأفكار التي يمكن أن تُبنى عليها بقية التفاصيل التي تكتسب أهمية خاصة في حد ذاتها .  
فالتفاصيل تشمل بتوسيع دراسة المصفوفات ، خصائصها ، معكوماتها ، مدى ارتباطها بإيجاد حلول هذه الأنظمة المشار إليها في عنوان البند .  
وتكتسب هذه الأنظمة ذات الرتبة الأولى أهميتها البالغة لكونها نتاج أنظمة ذات رتب أعلى . وبمعنى آخر ، فإنه بالإمكان تحويل معظم أنظمة المعادلات الخطية ذات الرتبة العليا إلى أنظمة خطية من الرتبة الأولى .  
والمثال التالي يوضح ما نهدف إليه من تحويل الرتبة العليا إلى الرتبة الأولى .

مثال ١ . لننظر إلى المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية

$$y'' - 6y' + 8y = x - 2 \quad (1)$$

فلو اخترنا الإحلال  $u = y'$  أصبحت المعادلة (1) على النحو

$$u' = 6u - 8y + x - 2$$

وبذلك نكون قد أحلنا محل المعادلة (1) النظام الخطي التالي ذي الرتبة الأولى

$$y' = u$$

$$u' = 6u - 8y + x - 2 \quad (2)$$

وبنفس الأسلوب فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثالثة

$$y''' - y'' + 2y' - 3y = e^x$$

كنظام مكون من معادلات خطية من الرتبة الأولى ، وذلك باستعمال التعويض

$$u = y' , \quad v = u' = y''$$

وبذلك تتحول المعادلة (3) إلى

$$v' - u' + 2u - 3y = e^x$$

أو

$$v' = v - 2u + 3y + e^x$$

ومن ثم ننتهي إلى نظام من المعادلات ذات الرتبة الأولى الكائنة للمعادلة (3)

$$y' = u$$

$$u' = v \quad (4)$$

$$v' = v - 2u + 3y + e^x$$

أما النظام الثاني

$$y'' - y + 5v' = \cos x$$

$$2y' - v'' + 4v = e^x - x \quad (5)$$

فنستعمل معه التعويض  $u = v'$  وكذلك  $w = y'$  فننتهي إلى النظام

$$u' = 4v + 2w + x - e^x$$

$$v' = u \quad (6)$$

$$w' = -5u + y + \cos x$$

$$y' = w$$

وأما السؤال الذي يبرز هنا مباشرة هو : ماذا يجدي تحويل المعادلات

والأنظمة ذات الرتبة العليا إلى أنظمة من الرتبة الأولى ؟

وكما أشرنا في بداية البند فلن نخوض في الإجابة التفصيلية الكاملة ، لأن

ذلك سيقودنا حتما إلى دراسة سريعة شاملة لنظرية المصفوفات وخواصها الجبرية

- وليس هذا مجاله هنا - وإنما سنكتفي بالإشارة إلى المثال التالي وبعض التعليق

البسيط الذي يليه .

مثال ٢. أوجد حلا للنظام الخطي ذي الرتبة الأولى

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= x - y\end{aligned}\quad (7)$$

الحل : بإمكاننا إعادة كتابة النظام ( 7 ) على النحو

$$\begin{aligned}(D - 2)x - 4y &= 0 \\ -x + (D + 1)y &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

وبالتأثير على المعادلة الأولى بالمؤثر  $D + 1$  وحرب الثانية في 4 ثم جمعها نحصل على

$$(D^2 - D - 6)x = 0 \quad (9)$$

وبتساوب مماثل يمكننا التخلص من  $x$  في النظام (2) لنحصل على

$$(D^2 - D - 6)y = 0 \quad (10)$$

وبذلك نستنتج أن حلي النظام ( 7 ) يجب أن يكونا على الهيئة

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

$$y = c_3 e^{3t} + c_4 e^{-2t}$$

علما بأن هناك علاقة تربط بين الثوابت الاختيارية  $c_1, c_2, c_3, c_4$  يمكن إيجادها من طريق التعويض مرة أخرى في النظام ( 7 ) .

هذا ويمكننا معالجة النظام ( 7 ) منذ البداية إذا توقعنا أن طبيعة المعادلتين

اللتين تشكلان النظام تستوجب وجود حلول من النوع

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^{mt} \\ y &= c_2 e^{mt}\end{aligned}\quad (11)$$

على أن تحدد الثوابت  $c_1, c_2, m$  بالتعويض في النظام ( 7 ) والذي سيفضي

تنفيذه إلى المعادلتين الجبريتين التاليتين :

$$m c_1 e^{mt} = 2c_1 e^{mt} + 4c_2 e^{mt}$$

$$m c_2 e^{mt} = c_1 e^{mt} - c_2 e^{mt}$$

$$\begin{aligned}(m-2)c_1 - 4c_2 &= 0 \\ -c_1 + (m+1)c_2 &= 0\end{aligned}\quad (12)$$

ومما نعلمه من مبادئ الجبر الخطي أن النظام الجبري (12) لا يوجد له حل غير صفري إلا إذا كانت المحددة

$$\begin{vmatrix} m-2 & -4 \\ -1 & m+1 \end{vmatrix} \quad (13)$$

صفيرية . أي أنه يُشترط تحقق المعادلة

$$(m-2)(m+1) - 4 = 0$$

أو

$$m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$$

وبالاضافة فإن كون  $m = 3$  سيفرض على النظام (12) تحقق الشرط  $c_2 = \frac{c_1}{4}$  .

أما  $m = -2$  'فسيؤدي إلى تحقق الشرط  $c_2 = -c_1$  . وبالتالي فهناك حلان مختلفان على الهيئة (11) هما

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^{3t}, \quad y = \frac{c_1}{4} e^{3t} \\ x &= c_1 e^{-2t}, \quad y = -c_1 e^{-2t}\end{aligned}\quad (14)$$

ملحوظة . هذه الاضافة جعلت لأولئك الذين لديهم خلفية لا بأس بها عن المصفوفات وحل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات . فالنظام (7) يمكن كتابته على الصورة

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX \quad (15)$$

ولو كان

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لوجدنا أن

$$mI - A = \begin{pmatrix} m-2 & -4 \\ -1 & m+1 \end{pmatrix}$$

هي المصفوفة التي لها نفس المحددة المعطاة في (13) .

وبافتراض أنه لا بد من وجود حلول من النوع (11) فإنه يمكننا كتابة ذلك النوع من الحلول على الصورة

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{mt} = C e^{mt}$$

عندها نجد أن (15) يفضي بنا إلى المعادلة المصفوفية

$$C m e^{mt} = AC e^{mt}$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو

$$(mC - AC)e^{mt} = 0$$

وحيث أن  $C = IC$  ، فإن

$$(mI - A)C e^{mt} = 0 \quad (16)$$

وبما أننا نسمى إلى تحقيق (16) لجميع قيم  $t$  فلا بد أن يكون

$$(mI - A)C = 0 \quad (17)$$

ولا يمكن أن يكون للمعادلة (17) حل غير صفري إلا إذا كانت محددة المصفوفة

$mI - A$  تساوي الصفر ، أي

$$|mI - A| = 0 \quad (18)$$

وهي كثيرة حدود من الدرجة الثانية في المجهول  $m$  . وهي تعتمد فقط على

المصفوفة  $A$  . وبحل (18) نجد أن قيم  $m$  التي تحققها هي 3، -2 .

ولو أخذنا  $m = 3$  في (17) لحصلنا على

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نحصل على  $c_1 - 4c_2 = 0$  أو  $c_2 = \frac{c_1}{4}$  . وفي الصيغة المصفوفية

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} C_1$$

وهو ما حصلنا عليه في السطر الأول من (14) . وللحصول على السطر الثاني

نعوض عن  $m = -2$  في المعادلة (17) فنجد

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه  $4c_1 + 4c_2 = 0$  أو  $c_1 = -c_2$  .

مثال ٣. في حالة استيعاب الملاحظة الإضافية السابقة ، فإنه يمكن بأسلوب مماثل إيجاد حلول النظام  $X' = AX$  حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

تتارين

فيما يلي أوجد نظاما من المعادلات ذات الرتبة الأولى يحل محل المعادلة المعطاة :

$$(1) \quad y'' + 6y' - 3y = e^x - 2$$

$$(2) \quad y'' - 3y' + 5y = \sin x$$

$$(3) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

$$(4) \quad y''' - 6y'' + 4y' = e^t - t$$

$$(5) \quad y''' + py'' + qy' + ry = f(x)$$

$$(6) \quad y^{(4)} - y = 0$$

فيما يلي أوجد نظاما من المعادلات ذات الرتبة الأولى يحل محل النظام الثاني المعطى :

$$(7) \quad (D^2 - D + 5)x + 2D^2y = e^t - 1$$

$$-2x + (D^2 + 2)y = 3t - t^2$$

$$(8) \quad v' - 2v + 2w' = 2 - 4e^{2x}$$

$$2v' - 3v + 3w' - w = 0$$

$$(9) \quad (3D + 2)v + (D - 6)w = 5e^x$$

$$(4D + 2)v + (D - 8)w = 5e^x + e^{-x} - 1$$

$$(10) \quad (D^2 + 6)y + Dv = 0$$

$$(D + 2)y + (D - 2)v = 2$$

فيما يلي أوجد حلا لكل من الأنظمة الخطية التالية :

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = 8x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 16x - 8y$$

$$(12) \quad x' = x$$

$$y' = -2x + 2y$$

$$(13) \quad x' = 4x + 3y$$

$$y'' = -4x - 4y$$

$$(14) \quad x' = 3x + 3y$$

$$y' = -x - y$$

$$(15) \quad x' = 12x - 15y$$

$$y' = 4x - 4y$$

$$(16) \quad x'' = x + 2y - z$$

$$y' = 2x + y + z$$

$$z' = -x + y'$$

## ٤-١. ملخص الباب

خُصص هذا الباب لدراسة مبسطة للأنظمة الخطية المكونة من أكثر من معادلة تفاضلية . وقد تم التركيز على الأنظمة ذات المعاملات الثابتة دون غيرها من المعاملات المتغيرة ، كما أثرنا إعطاء مزيد من الاهتمام للأنظمة المكونة من معادلتين فقط ، وإن لم يكن النقاش مقصورا عليها وحدها..

وفي البند الثاني استعرضنا طريقة الحذف الأولي وهي تهدف إلى التخلص من المتغيرات الا واحدا حيث يكون الناتج معادلة تفاضلية خطية ذات رتبة تماوي أو تتجاوز الأولى .



وقد إشرنا في نفس البند إلى طريقتين أخريين يؤديان إلى نفس النتيجة ، وربما اختلفتا عن طريقة الحذف الأولى في حجم العمليات الجبرية ونوعيتها .

أما البند الثالث فقد أشرنا باقتضاب إلى حلول الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة والمكونة من معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى . ولهذه الأنظمة أهميتها البالغة إذ أنه بالإمكان تحويل معظم الأنظمة الأخرى المكونة من معادلات ذات رتبة أعلى إلى أنظمة مكونة من معادلات من الرتبة الأولى ، وإن ازداد عدد المعادلات غالباً إلا أن ذلك يقابله إنخفاض الرتبة إلى الأولى ومن ثم تسهل عملية حل النظام الأصلي بعد إحلال النظام الجديد محله .



## الباب الحادي عشر

# تطبيقات على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية

■ مقدمة ■ الاهتزازات الميكانيكية والحركة التوافقية البسيطة ■ الاهتزازات غير  
المتعامدة ■ التوليد ■ الاهتزازات المتعامدة ■ الجدول البسيط ■ الدوائر الكهربائية  
البسيطة .



## ١-١١ مقدمة

في هذا الباب وكما في الباب الثالث سنقتصر على استعراض بعض التطبيقات العملية على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية . وربما كان هذا الباب مراجعة جيدة لما درسنه في الأبواب السابقة عن حلول المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية المتجانسة منها وغير المتجانسة .

ولن نبتعد في هذا الباب عن التطبيقات الأساسية المعروفة والمتداولة في معظم الكتب الأولية التي تغطي مادة المعادلات التفاضلية لطلاب الجامعة في سنتهم الثانية . وتشمل هذه التطبيقات المركبات التوافقية البسيطة والاهتزازات الميكانيكية ومنها الاهتزازات الحرة المتخامدة وغير المتخامدة ، وكذلك الرنين .

كما تشمل هذه التطبيقات كذلك التطبيقات القسرية والدوائر الكهربائية وغيرها من التطبيقات العديدة .  
أما البنود التالية فستغطي بعض هذه التطبيقات .

## ٢-١١ الاهتزازات الميكانيكية والحركة التوافقية البسيطة

لا يكاد يمر يوم الا وتواجه انواعا متعددة من الاهتزازات الميكانيكية ، فارتجاج السيارة بسبب المطبات الاسفلتية ، واهتزاز الجصور بسبب الرياح والكثافة المرورية ، وكذلك تذبذب جناح الطائرة بسبب اهتزاز للمركبات ومقاومة الهواء ، كل هذه امثلة عامة معروفة . ولدراسة هذه الظاهرة فسنبدأ بنظام

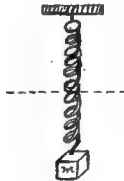
ميكانيكي بسيط مكون من زنبرك مثبت من أعلاه إلى جسم ثابت صلب ، ومعلق من طرفه الأيسر كتلة صلبة ( انظر الشكل ١١-١ ) . و بصفة عامة فإن الزنبرك سيخضع لقانون هوك Hook's law ، والذي ينص على أنه إذا شد أو ضُغُط زنبرك ، فإن مقدار التغير الناتج في طول الزنبرك يتناسب مع القوة المؤثرة عليه . وعند إزالة هذه القوة المؤثرة فإن الزنبرك سيعود إلى وضعه الأصلي مع الاحتفاظ بطوله وبخصائصه الأخرى دون تغيير .

وهكذا فإن لكل زنبرك ثابتا عدديا مرتبطا به يساوي مقدار القوة المؤثرة على الزنبرك مقسوما على مقدار الإزاحة الناتجة من تأثير هذه القوة ، وبمعنى آخر فلو أن قوة قدرها  $F$  كجم أدت إلى تمدد الزنبرك  $s$  من الأمتار ، فإن العلاقة الخطية

$$F = k s \quad (1)$$

تحدد مقدار " ثابت الزنبرك "  $k$  و وحدته كجم/م . فمثلا لو أثرت قوة قدرها 5 كجم على الزنبرك فازاحته بمقدار 25 سم إلى الأسفل ، فإن ثابت الزنبرك يساوي

$$k = \frac{F}{s} = \frac{5 \text{ Kg}}{0.25 \text{ m}} = 20 \text{ Kg / m}$$

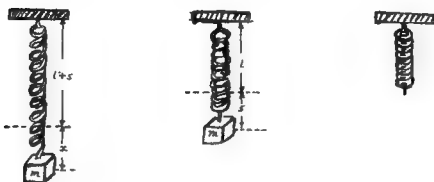


الشكل ١١-١

زنبرك معلق في أسفله كتلة

ولتكن لدينا كتلة وزنها  $w$  معلقة في الطرف السفلي للزنبرك ، ولنفترض أنها في وضع اتزان ( الشكل ١١-٢ ب ) . وفي اللحظة التي تُترك فيها للكتلة  $w$  حرية

التحرك من وضع الاتزان ( الشكل ١١-٢ ج ) فإن هذه الحركة تعدها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وذات شروط ابتدائية محددة .



(ج)

(ب)

(ا)

الشكل ١١-٢

ولاشتقاق هذه المعادلة التفاضلية يجب أن نأخذ في الحسبان القوى المؤثرة على الكتلة  $w$  وإتجاه كل من هذه القوى . وإصطلاحا سنعتبر القوة موجبة إذا كان إتجاهها إلى أسفل وسالبة إذا كان إتجاهها إلى أعلى . أما هذه القوى فهي :

١ - قوة الجاذبية  $F_1$  وهي نفسها  $w$  وتساوي

$$F_1 = w = mg \quad (2)$$

حيث  $m$  وزن الكتلة و  $g$  تسارع الجاذبية .

٢ - القوة المرجعة  $F_2$  وهي القوة الناتجة عن الزنبرك نفسه والتي تتناسب مع مقدار ازاحة الزنبرك . ولو رجعنا إلى الشكل (ج) لראينا أن الزنبرك قد تمدد بمقدار  $s + x$  من طوله الطبيعي  $l$  . وبذلك يكون مقدار  $F_2$  مساويا  $k(x + l)$  حيث  $k$  هو ثابت الزنبرك الذي إشرنا إليه سابقا . وحيث أن إتجاه هذه القوة إلى أعلى لأنها نابعة من نفس الزنبرك ، لذلك فهي سالبة ، أي أن

$$F_2 = -k(x + s) \quad (3)$$

ويجدر بنا أن نشير هنا إلى أنه عندما تكون  $x = 0$  ، فإن النظام في وضع اتزان . ومن ثم تكون قوة الجاذبية  $F_1$  والقوة الناتجة عن الزنبرك متساويتين ، أي أن

$mg = ks$  . وبالتعويض في (3) نحصل على

$$F_2 = -kx - mg = -(kx + mg) \quad (4)$$

٢ - قوة التخامد أو القوة المثبطة  $F_3$  وهي قوة احتكاكية أو مثبطة تؤثر في الكتلة . فمثلا تعمل مقاومة الهواء كقوة تخامد أحيانا . وعموما فإننا نفترض أن قوة التخامد تتناسب مع سرعة الكتلة ، لكنها تعاكسها في الإتجاه . أي أن

$$F_3 = -b \frac{dx}{dt}, \quad b > 0 \quad (5)$$

حيث  $b$  ثابت التخامد ووحدته كتلة / زمن .

٤ - القوى الخارجية ، وقد تكون موجبة أو سالبة حسب إتجاه تأثيرها ( ومثال ذلك قوة حقل مغناطيسي يؤثر على كتلة صلبة معلقة بطرف الزنبرك ) وسنرمز لحصيلة هذه القوى بالرمز  $F_4$  أو  $F$  . وسنفترض أنها تابعة للمتغير  $t$  فقط فهي دالة تتغير بتغير الزمن .

وبالتالي تكون مجموع القوى المؤثرة على الكتلة  $w$  مساوية للقوة الكلية المؤثرة على الكتلة ، أي أن

$$\begin{aligned} \tilde{F}\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ &= mg - (kx + mg) - b \frac{dx}{dt} + F(t) \\ &= -kx - b \frac{dx}{dt} + F(t) \end{aligned}$$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني تنتج لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية هي

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F(t)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (6)$$

ولكى تكتمل الصياغة اللازمة لمسألة الاهتزازات فلا بد من إضافة الشرطين الابتدائيين التاليين

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \quad (7)$$



حيث الشرط الأول يمثل مقدار ازاحة الكتلة من وضع الاتزان عند اللحظة  $t = 0$  ويساوي  $x_0$  . أما الشرط الثاني فيمثل السرعة الابتدائية للكتلة عند اللحظة  $t = 0$  وتساوي  $v_0$  .  
وفي البندين التاليين سنتناول حالات خاصة من المعادلة (6) .

### ٣-١١ الاهتزازات غير المتخامدة

عندما تساوي  $b$  الصفر في المعادلة (6) أملاه يزول تأثير قوة التخميد وتصبح المعادلة ممثلة لاهتزازات غير متخامدة تأخذ الشكل

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t) \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة . وبالقسمة على  $m$  يصبح لدينا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (2)$$

حيث  $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$  . أما الدالة المكتملة للمعادلة (2) فهي

$$x_c = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة (2) على النحو

$$x = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t + x_p$$

حيث  $x_p$  الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة بينما  $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$  .

و أما إذا كانت  $F(t) = 0$  ، فإن المعادلة (2) تصبح على النحو

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta^2 x = 0$$

وهي تمثل ما يُسمى بالاهتزازات الحرة غير المتخامدة .

مثال ١ . لنفترض أن كتلة وزنها 4.9 كجم شدت زنبركا إلى أسفل لمسافة 10 سم بعد وصولها إلى وضع الاتزان ، ثم قمنا بشد الكتلة إلى أسفل لمسافة 20 سم تحت نقطة الاتزان ، وأمطيت الكتلة سرعة ابتدائية مقدارها  $(1/\sqrt{2})$  متر/ ثانية بإتجاه الأرض . بافتراض أننا تجاهلنا قوى التخميد والقوى الفارجية الأخرى التي قد تكون موجودة ، أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة الكتلة .

الحل : حيث أن الحالة التي بين أيدينا حالة اهتزازات حرة غير متخمدة ، فإن المعادلة (3) هي التي تمثل نظام الحركة في هذا المثال . ومن ثم يكون الحل على الصيغة

$$x(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t \quad (4)$$

ويترجى علينا أولا أن نجد قيمة  $\beta$  . بإستعمال قانون هوك يكون لدينا

$$4.9 = mg = k (0.1)$$

أو

$$k = 49 \text{ Kg/meter}$$

وحيث أن  $g = 9.8 \text{ meters/sec}^2$  ، فإن

$$m = \frac{4.9}{9.8} = 0.5 \text{ Kg} \left( \frac{\text{sec}^2}{\text{meter}} \right)$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{49}{0.5}} \\ &= \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

وبالتعويض في (4) نجد أن

$$x(t) = c_1 \cos (7\sqrt{2} t) + c_2 \sin (7\sqrt{2} t)$$

الآن نستعمل الشروط الابتدائية لإيجاد قيمتي الثابتين  $c_1, c_2$  :

$$0.20 = x(0) = c_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = x'(0) = 7\sqrt{2} c_2$$

وبالتالي  $c_1 = \frac{1}{5}$  ،  $c_2 = \frac{1}{14}$  . ويصبح الشكل النهائي للدالة  $x$  على النحو

$$x(t) = \frac{1}{5} \cos(7\sqrt{2}t) + \frac{1}{14} \sin(7\sqrt{2}t) \quad (5)$$

لاحظ أنه بإمكاننا إعادة كتابة (5) على النحو

$$x(t) = A \sin(7\sqrt{2}t + \phi) \quad (6)$$

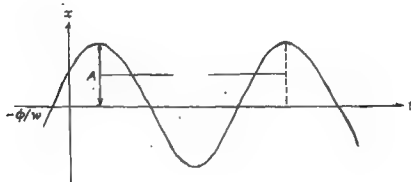
حيث

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{\frac{212}{70}}$$

بينما

$$\tan \phi = \frac{c_1}{c_2} = \frac{14}{5} = 2.8$$

ويتضح من (6) أن نظام الاهتزازات الحرة غير المتخمدة يمثلها منحنى دالة الجيب أو ما يسمى بالحركة التوافقية البسيطة . ويمثل المقدار  $A$  سعة نبضة الحركة بينما تمثل  $\phi$  زاوية المرحلة . وهذه الحركة دورية سعة كل دورة فيها  $2\pi/\beta$  بينما عدد لذبذباتها  $\beta/2\pi$  ( انظر الشكل ١١-٢ ) .



الشكل ١١-٢

منحنى الاهتزازات الحرة غير المتخمدة

مثال ٢ (الاهتزازات القسرية) . لنفترض أن  $F(t) = F_0 \sin wt$  في المعادلة (2)

وأن  $A = \frac{c}{m}$  . عندها يمكن إعادة كتابة (2) على النحو

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = F_0 \sin wt \quad (7)$$

مع إضافة الشرطين الابتدائيين

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

هذا ويُطلق على هذا النظام " الاهتزازات القسرية غير المتخامدة " في حالة كون

$\beta \neq w$  . أما الحل الخاص للمعادلة (7) فيأخذ الشكل العام

$$x_p = C \sin wt$$

ويمكن إيجاد  $C$  بالتعويض المباشر في (7) حيث

$$-Cw^2 \sin wt + \beta^2 C \sin wt = F_0 \sin wt$$

وبالتالي فلا بد أن نحصل على

$$C = \frac{F_0}{\beta^2 - w^2}$$

ومن ثم فالحل العام للمعادلة (7) هو

$$x(t) = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t + \frac{F_0}{\beta^2 - w^2} \sin wt$$

ومنه

$$x'(t) = c_1 \beta \cos \beta t - c_2 \beta \sin \beta t + \frac{F_0 w}{\beta^2 - w^2} \cos \beta t$$

وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن قيمتي الثابتين هما

$$c_1 = \frac{v_0}{\beta} - \frac{F_0 w}{\beta(\beta^2 - w^2)}, \quad c_2 = x_0$$

ومن ثم فإن الحل النهائي العام للمعادلة (7) هو

$$x(t) = \frac{v_0}{\beta} \sin \beta t + x_0 \cos \beta t - \frac{F_0 w}{\beta(\beta^2 - w^2)} \sin \beta t + \frac{F_0}{\beta^2 - w^2} \sin wt$$

## ١١-٤ الرنين resonance

مرة أخرى نعود إلى المعادلة (6) من البند ١١-٢

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (1)$$

وبافتراض أن  $b = 0$  ، وأن القوة الخارجية  $F(t)$  معطاة بالدالة الدورية  $C \cos wt$  حيث  $C$  مقدار ثابت ، فإن المعادلة (1) تأخذ الوضع

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = C \cos wt$$

وبالقسمة على  $m$  يصبح لدينا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{C}{m} \cos wt$$

وحيث أن  $\frac{k}{m} > 0$  ، فيمكننا إعادة كتابة المعادلة الأخيرة على النحو

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta^2 x = F_0 \cos wt$$

حيث

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad F_0 = \frac{C}{m}$$

وللحصول على معادلة الرنين لا بد أن يتوفر لدينا الشرط الهام التالي

$$\beta = w$$

وبذلك نحصل على المعادلة التفاضلية الممثلة لحركة الرنين

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + w^2 x = F_0 \cos wt \quad (2)$$

ولهذه المعادلة التفاضلية الدالة المكملية

$$x_c = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$$

أما الحل الخاص  $x_p$  فيمكن إيجاده بإستخدام طريقة المعاملات غير المعينة ، فنكتب أولاً الصيغة العامة للحل الخاص

$$x_p = At \sin wt + Bt \cos wt \quad (3)$$

حيث  $A, B$  ثابتان يتمين إيجادهما . ثم بالتعويض المباشر من (3) في (2) نحصل على

$$2Aw \cos wt - 2Bw \sin wt = F_0 \cos wt$$

وهذا يعني أن

$$B = 0, A = \frac{F_0}{2w}$$

ومن ثم فإن

$$x_p = \frac{F_0}{2w} t \sin wt$$

إذا الحل العام للمعادلة (2) هو

$$x = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt + \frac{F_0}{2w} t \sin wt \quad (4)$$

وبتطبيق الشرطين الابتدائيين  $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$  نجد أن

$$c_1 = x_0, c_2 = \frac{v_0}{w}$$

وبالتالي نحصل على الحل العام في صورته النهائية

$$x(t) = x_0 \cos wt + \frac{v_0}{w} \sin wt + \frac{F_0}{2w} t \sin wt \quad (4)$$

ملاحظة . فيما يلي مقارنة بين الوحدات المستخدمة في النظامين المتري والإنجليزي:

١ بوصة	٢.٥٣٨ سم
١ رطل	٠.٤٥٤ كجم
١ قدم	١٢ بوصة

## تمارين

١ - إذا كان لدينا زنبرك يتمدد بمقدار بوصة ونصف بتأثير كتلة وزنها ٢ رطل .  
ولو رفعنا الكتلة إلى أعلى لمسافة ٣ بوصات فوق وضع الاتزان ، ثم تُركت . أوجد  
القانون الذي يصف الحركة . الجواب :  $x(t) = -0.25 \cos 16t$

٢ - في المسألة أعلاه ، لو سحبنا الكتلة إلى أسفل لمسافة ٤ بوصات تحت وضع  
الاتزان ثم أعطيت سرعة ابتدائية نحو الأسفل قدرها ٨ أقدام في الثانية . أوجد  
القانون الذي يصف الحركة . الجواب :  $x(t) = \frac{1}{3} \cos 16t + \frac{1}{2} \sin 16t$

٣ - اثبت أنه يمكن كتابة جواب التمرين الثاني على النحو  $x = 0.6 \sin(16t + \phi)$   
حيث  $\phi = \tan^{-1} \frac{2}{3}$  .

٤ - إذا كان لدينا زنبرك يتمدد بمقدار ٦ بوصات بتأثير كتلة وزنها ١٢ رطلا ، وإذا  
سُحبت الكتلة إلى الأسفل لمسافة ٣ بوصات تحت وضع الاتزان ثم تُركت وإذا كانت  
هناك قوة مسلطة قدرها  $9 \sin 4t$  رطل . أوجد القانون الذي يصف الحركة  
بافتراض أن القوة المسلطة تؤثر نحو الأسفل إذا كانت قيم  $t$  صغيرة .

الجواب :  $x(t) = \frac{1}{4} \cos 8t - \frac{1}{4} \sin 8t + \frac{1}{2} \sin 4t$

٥ - اثبت أنه يمكن إعادة كتابة جواب التمرين السابق على النحو

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \left( 8t + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \sin 4t$$

٦ - يتمدد زنبرك بمقدار بوصة ونصف البوصة تحت تأثير كتلة وزنها ١٦ رطلا .  
لو سُحبت الكتلة إلى الأسفل لمسافة ٤ بوصات تحت وضع الاتزان ، وأعطيت سرعة  
ابتدائية نحو الأسفل قدرها ٤ أقدام / ثانية ، ثم تم تسليط قوة خارجية قدرها  
 $360 \cos 4t$  رطلا . أوجد قيمة  $x$  ، للكتلة في اللحظة  $t = \pi/8$  ثانية .

الجواب :  $x = -8 \text{ (ft/sec)}$  ،  $x = (-8/3) \text{ ft}$

٧ - تؤثر كتلة وزنها ٢٠ رطلا على زنبرك فيتمدد مسافة ١٠ بوصات . افترض أولا  
أنه تم ضغط الزنبرك بقدر ٤ بوصات ، ثم تم تعليق الكتلة المذكورة في الزنبرك  
وأعطيت سرعة ابتدائية نحو الأسفل قدرها ٨ أقدام في الثانية . أوجد إلى أي حد

استسقط الكتلة نحو الأسفل .  
 ٨ - تؤثر كتلة قدرها ٤ أوطال على زنبرك فيتعهد مسافة بوصة ونصف . لو أن الكتلة سُحِبَت إلى الأسفل مسافة ٢ بوصات تحت وضع الاتزان ثم تُرِكَت . ولو كانت هناك قوة مسلطة قدرها  $8 \sin 16t$  تؤثر على الزنبرك . أوجد القانون الذي يصف الحركة .  
 الجواب :  $x(t) = \frac{1}{4} (1 - 8t) \cos 16t + \frac{1}{8} \sin 16t$

## ٥-١١ الاهتزازات . المتخمدة damped vibrations

في البند السابق افترضنا أن حركة الجسم تكاد تتم في وضع مثالي ، حيث لا تأثير إطلاقاً للقوى الخارجية أو الاحتكاكية . فكانت النتيجة حركة توافقية بسيطة ، ولكن الواقع أنه في معظم التطبيقات العملية لا بد من وجود قوة احتكاكية أو قوة متخمدة تلعب دوراً هاماً في تحديد حركة النظام .  
 ولنعد هنا كتابة المعادلة ( 6 ) من البند ١١-٢ الشاملة لكل الاحتمالات المختلفة

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (1)$$

وبالطبع فالمعادلة المساعدة للمعادلة ( 1 ) هي

$$m r^2 + br + k = 0, \quad b \neq 0$$

أما جذرا المعادلة فهما

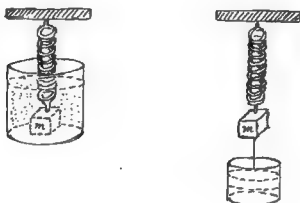
$$-\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4mk}$$

وكما نعلم من الباب السادس فإن صيغة حل المعادلة ( 6 ) تعتمد على طبيعة هذين الجذرين وبالأخص فهي تعتمد على المميز  $b^2 - 4mk$  . وفيما يلي سندرس كلا من الاحتمالات الممكنة للمميز وتعدد نوع الحركة الناتجة على ضوء كل احتمال .  
 وبما أن الحل المتعمم للمعادلة ( 6 ) لا يرتبط إطلاقاً بالدالة  $F(t)$  ، فإننا سنفترض أن  $F(t)$  تساوي الصفر . ولهذا فإننا سندرس ثلاث حالات محتملة للمعادلة التالية



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2)$$

إعتمادا على قيمة المميز  $b^2 - 4mk$  . ويصف عامة فإن الاهتزازات الناتجة من المعادلة (2) يطلق عليها مسمى " الاهتزازات الحرة المخامدة " ( الشكل ١١-٤ ) .



الشكل ١١-٤

#### الاهتزازات المخمدة

الحالة الأولى ( الاهتزازات المخمدة ) overdamped vibrations :

منذ ما يكون المميز موجبا ، أي  $b^2 - 4mk > 0$  ، وهذا نحصل على جذرين

حقيقيين مختلفين هما

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4mk} , \quad r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4mk}$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة (2) يكون على النحو

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (3)$$

وبالطبع فإن  $r_2$  سالبة ، وكذلك  $r_1$  لأن  $b^2 > b^2 - 4mk$  أو  $b > \sqrt{b^2 - 4mk}$  . ومن ثم فإن الدالة  $x(t)$  تقترب من الصفر كلما تزايدت  $t$  إلى ما لانهاية . وبأسلوب علمي رياضي نقول إن الحركة تتجه نحو الصمود والسكون مع مرور الوقت .

الحالة الثانية ( الحركة المتخامدة تخامدا حرجا ) critically damped :

عندما يساوي المميز الصفر ، وهنا نحصل على الجذر المكرر

$$r = -\frac{b}{2m}$$

وعليه يكون الحل العام للمعادلة ( 2 ) على النحو

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt} \quad (4)$$

وهذه الحركة تتجه أيضا إلى الصفر بمرور الوقت ، ويمكن إثبات ذلك باستعمال قاعدة لوبيتال L'hospital's rule حيث أن

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 t}{e^{bt/2m}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2}{\frac{b}{2m} e^{bt/2m}} = 0$$

الحالة الثالثة ( الحركة المتخامدة ) damped motion :

عندما يكون المميز سالبا . وهنا نحصل على الجذرين المركبين  $\alpha \pm i\beta$

حيث

$$\alpha = -\frac{b}{2m} , \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{2m}}$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة ( 2 ) هو

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad (5)$$

وكما فعلنا مع المعادلة ( 5 ) في البند ١١-٣ يمكننا إعادة كتابة المعادلة ( 5 ) على النحو

$$x(t) = A e^{\alpha t} \sin (\beta t + \phi) \quad (6)$$

حيث  $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  بينما  $\tan \phi = \frac{c_1}{c_2}$  .

وفيما يلي نتناول مثلا يشمل هذه الحالات الثلاث حيث تعتمد كل حالة على

قيمة الثابت  $b$  في المعادلة العامة ( 2 ) .

مثال ١. لنفترض أن حركة نظام مكون من كتلة وزنبرك تحكمها المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + 25x = 0; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \quad (7)$$

أوجد معادلة الحركة وارسم منحناها إذا كانت  $b$  تساوي كلا من القيم 8, 10, 12 على التوالي .

الحل : المعادلة المساعدة للمعادلة (7) هي

$$r^2 + br + 25 = 0$$

ولها جذران هما

$$r = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 100}$$

الحالة الأولى : عندما  $b = 8$  يكون لدينا الجذران

$$r_1 = -4 + 3i, \quad r_2 = -4 - 3i$$

وهي ممثلة لاهتزازات متخامدة تُعطى معادلة حركتها بالمعادلة التفاضلية

$$x(t) = c_1 e^{-4t} \cos 3t + c_2 e^{-4t} \sin 3t \quad (8)$$

وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{4}{3}$$

وبالتعويض في (8) نحصل على

$$x(t) = e^{-4t} \left( \cos 3t + \frac{4}{3} \sin 3t \right) \quad (9)$$

أما إذا أردنا إعادة كتابة (9) على نحو مماثل للصيغة (5) نجد أن

$$x(t) = \frac{5}{3} e^{-4t} \sin (3t + \phi)$$

حيث

$$\phi = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

الحالة الثانية : عندما  $b = 10$  . عندها نحصل على الجذر الوحيد المكرر  $r = -5$  . وهي حالة حركة متخامدة تخامداً حرجاً . وأما معادلة الحركة فهي

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-5t}$$

وبالتعويض في الشرطين الابتدائيين ننتهي إلى

$$x(t) = (1 + 5t) e^{-5t} \quad (13)$$

الحالة الثالثة : عندما  $b = 12$  . عندها يكون للمعادلة جذران هما  $-6 \pm \sqrt{11}$  . وهي حالة اهتزازات مخمدة ، ومعادلة حركتها معطاة بالمعادلة التفاضلية

$$x(t) = c_1 e^{(-6+\sqrt{11})t} + c_2 e^{(-6-\sqrt{11})t} \quad (14)$$

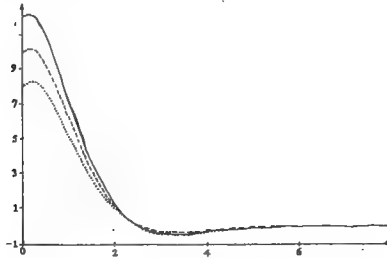
وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن

$$c_1 = \frac{11+6\sqrt{11}}{22} , \quad c_2 = \frac{11-6\sqrt{11}}{22}$$

وبالتالي تصبح (11) على النحو

$$x(t) = \frac{1}{22} \left\{ (11+6\sqrt{11}) e^{(-6+\sqrt{11})t} + (11-6\sqrt{11}) e^{(-6-\sqrt{11})t} \right\}$$

ويوضح الشكل ١١-٥ المنحنيات الثلاثة الممثلة للحالات الثلاث في هذا المثال .



الشكل ١١-٥

منحنى الحركات الناتجة من القيم المختلفة لـ  $b$

مثال ٢. لنفترض أن لدينا مجموعة مكونة من كتلة وزنبرك وأن هذه المجموعة

تتحرك بموجب المعادلة التفاضلية

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 12, \quad y'(0) = 4 \quad (12)$$

أوجد معادلة الحركة وارسم منحنائها بعد مرور فترات زمنية مختلفة .

الحل : المعادلة المساعدة للمعادلة (12) هي

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

والتي جذورها  $r = -1 \pm i$  . وبالتالي فإن معادلة الحركة تخضع للصيغة

$$y(t) = e^{-t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن

$$y(t) = 20e^{-t} \sin(t + \phi)$$

$$\text{حيث } \phi = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

✎

### تمارين

١ - تؤثر كتلة وزنها رطلان على زنبرك فيتمدد لمسافة نصف قدم . لو أثرت على

الزنبرك قوة مسلطة قدرها من الأرباط  $\frac{\sin 8t}{4}$  وقوة تخادم أخرى موهنة قدرها

١٧ . ولو بدأت الكتلة بمسافة ربع قدم تحت وضع الاتزان وبسرعة ناقلة للأعلى

قدرها 3 أقدام في الثانية . أوجد القانون الذي يحدد موضع الكتلة عند اللحظة  $t$  .

$$\text{الجواب : } x(t) = \frac{3}{32} e^{-8t} (3 - 8t) - \frac{1}{23} \cos 8t$$

٢ - تؤثر كتلة وزنها 4 أرطال على زنبرك فيتمدد لمسافة 0.32 قدم . صُفِّت الكتلة

في نهاية الزنبرك وتركزت لتتحرك في محيط ينتج قوة تخادم قدرها  $\frac{31\pi}{2}$  .

سُحِبَت الكتلة لمسافة نصف قدم تحت وضع الاتزان وأعطيت سرعة ابتدائية إلى

أعلى قدرها 4 أقدام في الثانية . أوجد القانون الذي يصف الحركة .

$$\text{الجواب : } x(t) = \frac{1}{8} e^{-8t} (4 \cos 8t - \sin 8t)$$

٢ - تؤثر كتلة وزنها رطلان على زنبرك فيتمدد لمسافة 6 بوصات ، لو كانت هناك قوة تخامد مقدارها مساو لمقدار السرعة ( مع اختلاف الوحدات طبعاً ) . وكانت هناك قوة مسلطة قدرها  $2 \sin 8t$  تؤثر على الزنبرك ، وعند اللحظة  $t = 0$  ، تُركت الكتلة حرة من نقطة تقع مسافة 3 بوصات تحت وضع الاتزان . أوجد المسافة

بمعلومية الزمن .  
الجواب :  $x(t) = \left( \frac{1}{2} + 4t \right) e^{-8t} - \frac{1}{4} \cos 8t$

٤ - تؤثر كتلة وزنها رطلان على زنبرك فيتمدد مسافة 4 بوصات . لو بدأت الكتلة حركتها من عند وضع الاتزان وبسرعة قدرها 21 قدم في الثانية نحو الأسفل ، ولو كانت مقاومة الهواء تنتج قوة تخامد قدرها 2 في المائة من مقدار السرعة . أوجد القانون الذي يصف الحركة .  
الجواب :  $x(t) = 1.22 e^{0.16t} \sin 9.8t$

٥ - في التمرين السابق ، كم من الوقت يجب أن يمر حتى يصبح معامل التخميد عشر قيمته الابتدائية ؟  
الجواب : ٤.٤ ، ١٤ ثانية

٦ - بالنسبة للتمرين الرابع . أوجد موضع الكتلة عند (١) الوقفة الأولى (ب) الوقفة الثانية .  
الجواب : (أ) ١٧ قدم (ب) ١٧ - قدم

٧ - تتمركز نقطة على طول المحور السيني طبقاً للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

لو بدأت النقطة الحركة عند النقطة  $x = 0$  وبسرعة ابتدائية قدرها 21 قدم في الثانية في الاتجاه الأيسر . أوجد ما يلي :

(أ) قيمة  $x$  بمعلومية  $t$  .

(ب) اللحظات التي تقف خلالها النقطة .

(ج) النسبة بين القيم العددية للمسافة  $x$  عند الوقفات المتتالية .

الجواب : (أ)  $x(t) = -3e^{-3t} \sin 4t$

(ب)  $t = 0.23 + \frac{n\pi}{4}$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

(ج) 0.095

## ٦-١١ البندول البسيط simple pendulum

يتكون البندول البسيط من حبل طوله  $L$  معلق من طرفه العلوي بحيث يمكنه التأرجع بحرية في مستوى عمودي . ويُربط في الطرف السفلي للحبل ثقل وزنه  $w$  وطل . أما وزن الحبل فيُعتبر مُهملاً بالنسبة لوزن الثقل . ولنرمز بـ  $\theta$  لزاوية الانزاحة ، وهي تلك الزاوية التي يشكلها البندول مع المحور الرأسي ( كما في الشكل ٦-١١ ) في اللحظة  $t$  . أما الجزء المماس من القوة فهو  $w \sin \theta$  حيث القوة الأصلية هي  $w$  المساوية لوزن الثقل



الشكل ٦-١١

## البندول البسيط

وبتجاهل وزن الحبل واستعمال القانون  $s = A\theta$  كمقياس لطول القوس الذي يشكله البندول أثناء حركته مع الوضع الرأسي يمكننا أن نستنتج أن

$$\frac{w}{g} \frac{d^2 s}{dt^2} = -w \sin \theta \quad (1)$$

لاحظ تماثل الوحدات في طرفي المعادلة ( 1 ) . وبما أن  $s = A\theta$  حيث  $A$  مقدار ثابت ، فإن المعادلة ( 1 ) تصبح على النحو

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{A} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

أما حل المعادلة (2) فليس سهلاً البتة حيث يتعلق الحل بإجراء تكامل إهليلجي elliptic integral . وعلى أي حال إذا كانت  $\theta$  صغيرة فإن  $\sin \theta = \theta$  تقريباً ، ومن ثم يمكن تقريب المعادلة (2) لتصبح على النحو المبسط

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta^2\theta = 0 \quad (3)$$

حيث  $\beta^2 = \frac{g}{A}$  .

وهكذا تتحول المعادلة (2) إذا كانت  $\theta$  صغيرة إلى المعادلة (3) المألوفة لدينا والتي عالجناها في البندين الثالث والرابع من هذا الباب . وربما كانت النتائج مفيدة طالما كانت  $\theta$  مستوفية للشرط  $|\theta| < 0.3 \text{ radians}$  .

#### تمارين

١ - لإحدى الساعات بندول طوله 6 بوصات . وتدق الساعة دقة واحدة في كل مرة يكمل فيها البندول دورة كاملة من التأرجح والعودة إلى وضعه الأصلي . كم مرة تدق الساعة خلال 30 ثانية ؟  
الجواب : ٢٨ مرة

٢ - لدينا بندول طوله 6 بوصات مستقر في وضع السكون الذي يشكل زاوية قدرها عشر الدرجة الدائرية مع المحور الرأسي . أوجد قانون الحركة بعد إطلاق البندول من وضع السكون علماً بأن الجاذبية الأرضية تساوي ٣٢ قدم / مربع الثانية .

$$\theta(t) = \frac{1}{10} \cos 8t \quad \text{الجواب :}$$

٣ - بافتراض أن لدينا نفس البندول السابق في نفس وضع السكون المحدد . لو أطلق البندول بسرعة قدرها درجة دائرية واحدة في الثانية بإتجاه المحور الرأسي .

$$\theta(t) = \frac{\cos 8t}{10} - \frac{\sin 8t}{8} \quad \text{الجواب :} \quad \text{أوجد قانون الحركة .}$$

٤ - بالنسبة للتمرين السابق ، أوجد - إلى أقرب درجة - الحد الأقصى لزاوية الازاحة من المحور الرأسي .  
الجواب : ٩ درجات



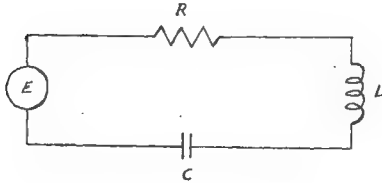
## ٧-١١ الدوائر الكهربائية البسيطة

في هذا البند نتناول تطبيقاً آخر من تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة . وهذا التطبيق يشمل الدائرة الكهربائية البسيطة المكونة من فرق جهد مسلط - كالبطارية أو المولد - ذات الرمز  $E$  ومقاومة  $R$  والمعة  $C$  ، وأخيراً الحاثية  $L$  ، وهي الأداة التي تحدث التأثير المغناطيسي في الدائرة الكهربائية . وكل هذه المكونات متصلة على التسلسل لتشكل الدائرة المغلقة كما في الشكل ٧-١١ وللإختصار تُسمى هذه الدائرة دائرة  $RLC$  .

هذا ويحكم هذه الدائرة مبدأان هما مبدأ حفظ الشحنة ومبدأ حفظ الطاقة . وقد قام العالم كيرشوف Kirchhoff بصياغة هذين المبدئين في القوانين التالية :

أولاً : مقدار التيار الذي يمر في كل عنصر من عناصر الدائرة ( $L, C, R, E$ ) ثابت لا يتغير .

ثانياً : فرق الجهد المسلط يساوي حاصل جمع فروق الجهد في بقية الدائرة .



الشكل ٧-١١

الدائرة الكهربائية البسيطة

ولتطبيق قوانين كيرشوف يجب أن تحيط علما بالقوانين التالية :

١ - فرق جهد المقاومة = شدة التيار مضروباً في المقاومة ، أو

$$E_R = I \cdot R$$

ب - فرق جهد المحاثة = المحاثة مضروباً في معدل تغير شدة التيار بالنسبة للزمن،  
أو

$$E_L = L \frac{dI}{dt}$$

ج - فرق جهد المكثف = مقولوب السعة مضروباً في الشحنة الكلية ، أو

$$E_C = \frac{1}{C} q$$

وبمقتضى قانون كيرشوف الثاني ( انظر ثانياً أملاء ) الذي ينص على مبدأ حفظ الطاقة ، فإن

$$E_L + E_R + E_C = E(t)$$

وبعد التعويض من المعادلات أملاء نحصل على

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (1)$$

وبما أن التيار هو التغير الآني في الشحنة ، أي أن  $I = \frac{dq}{dt}$  ، فإن بإمكاننا إعادة كتابة المعادلة ( 1 ) على الصورة

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (2)$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية .

وللمحصل على صيغة بديلة يمكننا اشتقاق المعادلة ( 2 ) بالنسبة للزمن ، ومن ثم

التعويض عن  $\frac{dq}{dt}$  بالتيار  $I$  لنصل إلى

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt} \quad (3)$$

هذا ويمكن أن نخفف للمعادلة ( 2 ) الشرطين الابتدائيين التاليين المفترض تحديدهما عند اللحظة  $t = 0$  . وهما

$$q(0) = q_0 , \quad q'(0) = I_0$$

وبالمثل يمكننا إضافة الشرطين الابتدائيين للمعادلة ( 3 )

$$I(0) = I_0 , \quad I'(0) = v_0$$

مثال ١. لدينا دائرة FLC فرق جهدها المسلط معطى بالمعادلة

$$E(t) = \sin 100t$$

ولها مقاومة قدرها 2 في المائة أوم ، ومحثية قدرها واحد في الألف من الهنري ، وسعة قدرها 2 فاراد . إذا كان كل من التيار الابتدائي  $I_0$  والشحنة الابتدائية يساوي صفرا . أوجد شدة التيار في الدائرة عندما تكون  $t$  أكبر من الصفر .

الحل : للتبسيط نعبر القيم المعطاة مرة أخرى

$$L = 0.001, \quad R = 0.02, \quad C = 2, \quad E(t) = \sin 100t$$

وبالتعويض في ( 3 ) نحصل على

$$0.001 \frac{d^2 I}{dt^2} + 0.02 \frac{dI}{dt} + 0.5 I = 100 \cos 100t$$

أو

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 20 \frac{dI}{dt} + 500 I = 100,000 \cos 100t \quad (4)$$

وللمعادلة المتجانسة ذات العلاقة معادلة مساعدة هي

$$r^2 + 20r + 500 = (r + 10)^2 + (20)^2 = 0$$

والتي لها الجذران المركبان  $10 \pm 20i$  . وبذلك يكون للمعادلة المتجانسة الحل

$$I_C(t) = e^{-10t} [c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t] \quad (5)$$

ويمكن الآن استعمال طريقة المعاملات غير المعينة لإيجاد الحل الخاص  $I_p$  .  
فبافتراض أن

$$I_p(t) = A \cos 100t + B \sin 100t$$

نجد الاشتقاقين الأول والثاني ثم نعوض في المعادلة ( 4 ) لننتهي أخيرا إلى النتيجة

$$A = -\frac{.95}{9.425} , \quad B = \frac{20}{9.425}$$

وإذا فالحل العام للمعادلة (4) هو

$$I(t) = e^{-10t} (c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t) - \frac{95}{9.425} \cos 100t + \frac{20}{9.425} \sin 100t \quad (6)$$

ولإيجاد قيمتي الثابتين  $c_1, c_2$  ، فلا بد لنا من إيجاد قيمة  $I(0)$  ، وكذلك قيمة  $I'(0)$  . أما  $I(0)$  فإننا نعلم من المعطيات أنها تساوي صفراً . ولإيجاد  $I'(0)$  نعوّض عن قيم  $C, R, L$  في المعادلة ( 1 ) ونساوي بين الطرفين في اللحظة  $t = 0$  . وبالتالي نحصل على

$$(0.001) I'(0) + (0.02) I(0) + (0.5) q(0) = \sin 0 = 0$$

وحيث أن  $I(0) = q(0) = 0$  ، فلا بد أن تكون  $I'(0) = 0$  .

و أخيراً نستعمل المعادلة ( 6 ) وقيم  $I(0)$  وكذلك  $I'(0)$  لنصل إلى

$$I(0) = c_1 - \frac{95}{9.425} = 0$$

$$I'(0) = -10c_1 + 20c_2 + \frac{2000}{9.425} = 0$$

ومن ثم نجد أن

$$c_1 = \frac{95}{9.425} , c_2 = -\frac{105}{18.85}$$

وإذا فالتيار في هذه الدائرة الكهربائية تحدده المعادلة

$$I(t) = \frac{e^{-10t}}{9.425} \left( 95 \cos 20t - \frac{105}{2} \sin 20t \right) - \frac{1}{9.425} (95 \cos 100t - 20 \sin 100t) \quad (7)$$

#### تمارين

١ - دائرة RLC لها فرق مصلط يساوي 20 فولت ، ومقاوم قدره 100 أوم ، ومحثية قدرها 4 هنري ، وسعة المكثف قدرها واحد في المائة من الفاراد . إذا كان التيار الابتدائي يساوي صفراً بينما الشحنة الابتدائية على المكثف تساوي 4 كولبس . أوجد المعادلة التي تصف شدة التيار بالنسبة للزمن  $t$  .

$$I(t) = \frac{19}{\sqrt{21}} e^{-12.5t} [e^{2.5\sqrt{21}t} - e^{-2.5\sqrt{21}t}] \quad \text{الجواب :}$$

٢- في التمرين السابق أوجد الحل الخاص فقط إذا كانت المعلومات التي لدينا على النحو التالي :

$$E = 10 \cos 20t \quad , \quad R = 120 \text{ ohms}$$

$$L = 4 \text{ henrys} \quad , \quad C = 0.001 \text{ farads}$$

$$I_p(t) = \frac{1}{51} (4 \cos 20t + \sin 20t) \quad \text{الجواب :}$$

٣- دائرة RLC لها محاثية قدرها 1 هنري ، مكثف سعة  $10^{-4}$  فاراد ، وفرق جهد مسلط معطى بالمعادلة  $E(t) = 100 \sin 50t$  . أما القيمة الابتدائية لكل من الشحنة والتيار فتساوي صفرا .

(أ) أوجد المعادلة التي توجد مقدار الشحنة في أية لحظة .

(ب) أوجد معادلة التيار في أية لحظة .

(ج) أوجد الأوقات التي تصل فيها سعة المكثف إلى الصفر .



الجزء الثاني عشر

## تحويلات لابلاس

■ مقدمة ■ تعريف ووجود تحويل لابلاس ■ خواص تحويل لابلاس ■ تحويل لابلاس العكسي ■ حل مسألة القيمة الابتدائية ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .





## ١-١٢ مقدمة

يهدف هذا الباب إلى إعطاء نبذة عن إحدى التطبيقات الهامة لتحويلات لابلاس في مجال المعادلات التفاضلية الخطية . وحتى نكون أكثر دقة فإننا سنعنى هنا بدراسة طريقة حل المسألة الابتدائية لمعادلة تفاضلية خطية عن طريق استعمال تحويلات لابلاس .

وفي البنود الثلاثة التالية سنتناول تعريف هذه التحويلات وبعض أهم خصائصها المتعلقة بموضوع هذا الباب ، ذلك أن دراسة هذه الخصائص تساهم إلى حد كبير في عملية تبسيط وتقريب فكرة استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة . ومن هنا تأتي أهمية البنود الثلاثة التالية بما فيها من أمثلة كثيرة متعددة .

وكما يُستدل من الاسم أو الإصطلاح ، فإن تحويل لابلاس Laplace transform ( المنسوب إلى عالم الرياضيات الشهير لابلاس ، ١٧٤٩-١٨٢٧م ، الفرنسي الجنسية ) يعمل على التأثير على دالة  $f$  فيكون الناتج دالة أخرى شأنه في ذلك شأن مؤثرات أخرى كثيرة كالمؤثر التفاضلي مثلا أو تكامل  $f$  وما شابه ذلك .

## ٢-١٢ تعريف ووجود تحويل لابلاس

تعريف ١. لتكن  $f$  دالة معرفة لجميع قيم  $t$  غير السالبة . ولتكن  $F$  دالة معرفة على النحو التالي :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

حيث مجال  $F$  يتكون من جميع قيم  $s$  التي تجعل التكامل في (1) موجودا . ويطلق على الدالة  $F$  تحويل لابلاس للدالة  $f$  . وللإختصار نشير لهذا التحويل بالرمز  $\{f(t)\}_L$  .

ملاحظة . لاحظ أن التكامل في (1) من التكاملات المعتلة . فهو أصلا عبارة عن النهاية

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = L\{f(t)\} \quad (2)$$

طالما وجدت هذه النهاية .

مثال ١. أوجد تحويل لابلاس للدالة  $f(t) = 1$  لجميع قيم  $t$  غير السالبة .

الحل : بتطبيق التعريف ١

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} . 1 dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=0}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s} \right) = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

لجميع قيم  $s$  المرجية . أما إذا كانت  $s$  سالبة فمن الواضح أن المقدار

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

لا يتقارب . إذا

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

لجميع قيم  $s$  الموجبة .

مثال ٢ . أوجد تحويل لابلاس للدالة  $\sin bt$  حيث  $b$  ثابت يختلف من الصفر .

الحل : بالاستعانة بأحد كتب التفاضل والتكامل نجد قيمة التكامل اللامحدود

$$\int e^{ax} \sin mx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin mx - m \cos mx)}{a^2 + m^2} + c$$

وطبقا للتعريف فإن

$$L\{\sin bt\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin bt \, dt$$

وبالتالي فإن

$$L\{\sin bt\} = \left[ \frac{e^{-st}(-s \sin bt - b \cos bt)}{s^2 + b^2} \right]_{t=0}^{\infty} \quad (3)$$

وعندما تكون  $s$  موجبة ، فإن  $e^{-st}$  تتحول إلى الصفر عندما تتحول  $t$  إلى ما لانهاية .

أما  $\sin bt$  وكذلك  $\cos bt$  ، فلا تتجاوز قيمتها المطلقة الواحد . وبالتالي نحصل

من (3) على

$$L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0 \quad (4)$$

و بطريقة مماثلة نجد أن

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$$

مثال ٢. أوجد تحويل لابلاس للدالة  $f$  غير المتصلة والمعرفة على النحو

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 5 \\ 0, & 5 < t < 10 \\ e^{4t} & 10 < t \end{cases}$$

الحل : طبقا لتعريف  $f$  الموضح أعلاه ، فإننا نجد قيمة التكامل في ( 1 ) عن طريق تقسيم إلى ثلاثة أجزاء مختلفة على النحو

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= \int_0^5 e^{-st} 2 dt + \int_5^{10} e^{-st} .0 dt + \int_{10}^{\infty} e^{-st} .e^{4t} dt \\ &= 2 \int_0^5 e^{-st} 2 dt + \int_{10}^{\infty} e^{-(s-4)t} dt \\ &= -\frac{2}{s} [e^{-st}]_{t=0}^5 - \frac{1}{s-4} [e^{-(s-4)t}]_{t=10}^{\infty} \\ &= \frac{2}{s} - 2 \frac{e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-10(s-4)}}{s-4}, \quad s > 4 \end{aligned}$$

ولتحويلات لابلاس خاصية هامة نلخصها في النظرية التالية التي يعتمد برهانها على الخاصية الخطية للتكامل ، ولذا فالبرهان سهل ومتروك للقارئ .

نظرية ١ . إذا وُجد تحويل لابلاس لكل من الدالتين  $f_1, f_2$  لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha$  ، وكان  $c$  ثابتا ، فإن

$$L\{f_1 + f_2\} = L\{f_1\} + L\{f_2\} \quad (5)$$

وكذلك

$$L\{cf_1\} = cL\{f_1\} \quad (6)$$

مثال ٤ . أوجد  $L\{5 - 3e^{2t} + 7 \sin 3t\}$

الحل : باستعمال النظرية ١ نجد أن

$$I = L\{5 - 3e^{2t} + 7 \sin 3t\} = 5L\{1\} - 3L\{e^{2t}\} + 7L\{\sin 3t\}$$

بإستعمال المثالين ٢، ١ يمكننا إيجاد قيمتي العدين الأول والثالث في الطرف الأيمن. ولإيجاد قيمة الحد الأوسط نجد أولاً قيمة  $L\{e^{2t}\}$  من التعريف

$$\begin{aligned} L\{e^{2t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{2t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-2)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-2} [e^{-(s-2)t}]_{t=0}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s-2} [0 - 1] = \frac{1}{s-2}; \quad s > 2 \end{aligned}$$

وعموماً فإن

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

ومن ثم نجد أن

$$I = 5 \frac{1}{s} - 3 \frac{1}{s-2} + \frac{21}{s^2+9}$$

مثال ٥. أوجد  $L\{\sin^2 t\}$ .

الحل: بإستعمال المتطابقة المثلثية المعروفة  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$  والرجوع إلى

مثالي ٢، ١ نجد أن

$$\begin{aligned} L\{\sin^2 t\} &= L\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} L\{1\} - \frac{1}{2} L\{\cos 2t\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+4} \\ &= \frac{2}{s(s^2+4)} \end{aligned}$$

أما السؤال التالي الذي قد يتبادر إلى الأذهان فهو عن وجود تحويلات لابلاس! ذلك أن هناك كثيرًا من الدوال التي تقع خارج مجال تحويلات لابلاس ، فمثلا لا يوجد  $\{t^{-1}\} L$  كما لا يوجد  $\{e^{t^2}\} L$  .

وفيما يلي نسطر شروطا كافية للدالة  $f$  تضمن وجود  $\{f\} L$  ، ولكن يجب أن يسبق ذلك التعريفات الثلاثة التالية :

**تعريف ٢ ( نقطة الانفصال القفزية jump discontinuity )**  
 لتكن  $f$  دالة معرفة على الفترة  $(a, b)$  . يقال للنقطة  $t_0$  في  $(a, b)$  أنها نقطة إنفصال قفزية للدالة  $f$  إذا كانت  $f$  غير متصلة عند النقطة  $t_0$  ، وكانت النهايتان

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) , \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$$

موجودتين كأعداد حقيقية محدودة .

وبناءً على هذا التعريف يمكننا الآن أن نعرف ما يُسمى بالإنفصال القطعي  
 . piecewise continuity

**تعريف ٣ ( الإنفصال القطعي )** . يقال للدالة  $f$  إنها متصلة قطعياً على الفترة المحدودة  $[a, b]$  إذا كانت  $f$  متصلة عند جميع نقاط  $[a, b]$  باستثناء عدد محدود من هذه النقاط التي يحتمل أن تمثل نقاط إنفصال قفزية للدالة  $f$  .

**تعريف ٤ ( الرتبة الأسية  $\alpha$  exponential order )** .

يقال أن الدالة  $f$  من الرتبة الأسية  $\alpha$  إذا وُجد ثابتان موجبان  $M, T$  بحيث

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad (7)$$

لمجميع قيم  $t$  المصاوية أو الأكبر من  $T$  .

نظرية ٢ (شروط وجود تحويلات لابلاس) . إذا كانت  $f$  دالة متصلة قطعياً على الفترة  $[0, \infty)$  ومن الرتبة الأسية  $\alpha$  ، عندها يوجد  $L\{f(t)\}(s)$  لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha$  .

البرهان :

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

لا حظ أن وجود  $I_1$  ناتج من حقيقة أن  $I_1$  يمكن كتابته كمجموع لعدد محدود من تكاملات  $f$  على فترات تكون  $f$  متصلة عليها . أما وجود  $I_2$  فيمكن إستنتاجه بإستعمال (7)

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_T^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \\ &\leq M \int_T^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \frac{M e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} < \infty \end{aligned}$$

لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha$  .

ملاحظة . معطيات النظرية ٢ كافية وليست ضرورية ، فالدالة  $f(t) = t^{-1/2}$  ليست متصلة قطعياً ، ولكن

$$L\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{-1/2} dt = 2s^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi/s}, s > 0$$

ونختم هذا البند بذكر تحويلات لابلاس لبعض من الدوال المعروفة .

الدالة $f$	$L\{f\}$
1	$1/s, s > 0$
$t^n e^{at}; n = 0, 1, \dots$	$n! / (s-a)^{n+1}, s > a$
$t^n; n = 1, 2, \dots$	$n! / s^{n+1}, s > 0$
$\sin bt$	$b / (s^2 + b^2), s > 0$
$\cos bt$	$s / (s^2 + b^2), s > 0$

#### جدول ١٢-١

بعض تحويلات لابلاس

#### تمارين

استخدم تعريف ١ لإيجاد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية :

- (1)  $e^{6t}$  (2)  $\cos 2t$  (3)  $e^{-t} \sin 2t$   
 (4)  $e^{-2t-5}$  (5)  $t \cos t$  (6)  $t e^{4t}$

$$(7) f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2 \\ t, & 2 < t \end{cases}$$

$$(8) f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ t, & 1 \leq t \end{cases}$$

$$(9) f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & 0 < t < 3 \\ 1, & 3 < t \end{cases}$$

استخدم جدول ١٢-١ والخاصية الخطية لإيجاد التحويلات التالية :

$$(10) L\{5 - e^{2t} + 6t^2\}$$

$$(11) L\{t^2 - 3t - 2e^{-t} \sin 3t\}$$



$$(12) \quad L \{ e^{3t} \sin 6t - t^3 + e^t \}$$

$$(13) \quad L \{ e^{-2t} \cos \sqrt{3} t - t^2 e^{-2t} \}$$

$$(14) \quad L \{ t^2 + 6t - 3 \}$$

$$(15) \quad L \{ 4t^2 - 5 \sin 3t \}$$

$$(16) \quad L \{ \sin 2t \cos 2t \}$$

$$(17) \quad L \{ 1 + e^{4t} \}$$

أي من الدوال التالية متصل ، وأيها متصل قطعيا ، وأيها لا ينتمي لأي من الفئتين :

$$(18) \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ t^2, & 2 \leq t \end{cases}$$

$$(19) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 < t < 3 \\ t^2-4, & 3 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$(20) \quad g(t) = \begin{cases} 1/t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1-t, & 2 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$(21) \quad h(t) = \frac{t^2 - t - 20}{t^2 + 7t + 10}$$

$$(22) \quad f(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$$

$$(23) \quad g(t) = \begin{cases} t^{-1} \sin t, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

أي من الدوال التالية من الرتبة الأسية :

$$(24) \quad 50 e^{19t}$$

$$(25) \quad (t^2 + 1)^{-1}$$

$$(26) \quad \sin t^2 + t^3 e^{5t}$$

$$(27) \quad 3 - e^{t^2} + 2 \cos 4t$$

$$(28) \quad t \ln t$$

$$(29) \quad e^{t^2}$$

## ١٢-٢ خواص تحويل لابلاس

في البند السابق رأينا أن إيجاد تعبير صريح للمقدار  $L\{f\}$  يتطلب منا حساب التكامل المعتل في ( ١ ) ، والذي قد لا يكون أمرا متيسرا في جميع الأحوال . وقد رأينا أيضا أن الخاصية الخطية لتحويلات لابلاس ساهمت إلى حد كبير من تخفيف هذا العبء .

وفي هذا البند سنناقش مزيدا من خواص تحويل لابلاس التي تتعلق لنا هدفين هامين هما :

- أولا : تبسيط عمليات حساب تحويلات لابلاس .
- ثانيا : المساهمة في إيجاد حلول المسائل الابتدائية بواسطة تحويلات لابلاس .

### خاصية الازاحة

نظرية ١ . إذا وجد تحويل لابلاس

$$L\{f\}(s) = F(s)$$

لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha$  ، فإن

$$L\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a) \quad (1)$$

لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha + a$  .

البرهان : بتطبيق التعريف مباشرة

$$\begin{aligned} L\{e^{at}f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a) \end{aligned}$$

وهكذا توخج لنا خاصية الازاحة التأثير الناتج على تحويل لابلاس والناشيء

من ضرب الدالة  $f(t)$  بالدالة الأسية  $e^{at}$  .

مثال ١. باستعمال مثال ٢ في البند السابق وخاصية الازاحة نستنتج أن

$$L \left\{ e^{at} \sin bt \right\} (s) = F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

تحويل لابلاس للمشتقة

نظرية ٢. لتكن  $f$  دالة متصلة على الفترة  $[0, \infty)$  . ولتكن  $f'$  متصلة قطعيا

على نفس الفترة ، ولتكن كلاهما من الرتبة الأسية  $\alpha$  . عندها نستنتج أن

$$L \{f'\}(s) = s L \{f\}(s) - f(0) \quad (2)$$

لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha$  .

البرهان : تكامل بطريقة التجزئة ومن طريق استخدام التعويض  $u = e^{-st}$

لنحصل على  $dv = f'(t) dt$

$$\begin{aligned} L \{f'\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= s L \{f\}(s) - f(0) \end{aligned}$$

مثال ٢. من طريق استخدام العلاقة

$$L \{ \sin bt \}(s) = \frac{b}{(s^2 + b^2)}$$

لوجد  $L \{ \cos bt \}$

الحل : إذا كانت  $f(t) = \cos bt$  ، فإن  $f(0) = 1$  ،  $f'(t) = -b \sin bt$  . بتطبيق (2)

نحصل على

$$\begin{aligned} L \{f'\}(s) &= s L \{f\}(s) - f(0) \\ L \{-b \sin bt\} &= s L \{\cos bt\}(s) - 1 \end{aligned}$$

أو

$$(-b) \frac{b}{s^2 + b^2} = s L \{ \cos bt \} (s) - 1$$

وبالتالي نجد المطلوب

$$\begin{aligned} L \{ \cos bt \} (s) &= \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{b^2}{s^2 + b^2} \right] \\ &= \frac{s}{s^2 + b^2} \end{aligned}$$

ويمكن بسهولة أن تعمم نظرية ٢ إلى المشتقات العليا على النحو التالي :

## تحويل لابلاس للمشتقات العليا

نظرية ٣. - لتكن  $f^{(n-2)}, f^{(n-1)}, \dots, f', f$  دوال متصلة على الفترة  $(0, \infty)$ ، ولتكن  $f^{(n)}$  متصلة قطعياً على نفس الفترة . ولتكن جميع هذه الدوال من الرتبة الأسية  $\alpha$  . عندها نستنتج أن

$$L \{ f^{(n)} \} (s) = s^n L \{ f \} (s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

## مشتقة تحويل لابلاس

نظرية ٤. - لتكن  $F(s) = L \{ f \} (s)$ ، ولنفترض أن  $f$  متصلة قطعياً على الفترة  $(0, \infty)$  ومن الرتبة الأسية  $\alpha$  . عندها نستنتج أنه لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha$

$$F'(s) = -L \{ t f(t) \} (s) \quad (3)$$

ولن نتعرض هنا للبرهان ، وإنما سنذكر نحن نظرية تعميم نظرية ٤ إلى رتب أعلى لمشتقات تحويل لابلاس .

نظرية ٥ . تمت نفس معطيات نظرية ٢ نستنتج أن

$$L \{ t^n f(t) \}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) \quad (4)$$

مثال ٣ . أوجد  $L \{ t \sin bt \}$  .

الحل : حيث أننا نعلم مسبقاً أن

$$L \{ \sin bt \}(s) = F(s) = \frac{b}{(s^2 + b^2)} .$$

فمنقوم باشتقاق  $F(s)$

$$F'(s) = \frac{dF}{ds}(s) = - \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

و بتطبيق المعادلة (3) نجد أن

$$L \{ t \sin bt \}(s) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

#### تمارين

باستعمال الجدول ١٢-١ وننتج هذا البند ، أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية ، مع استعمال المتطابقات المثلثية المناسبة إن دعت الحاجة :

(1)  $t^2 + 4t - 5$

(2)  $3t^2 - e^{2t}$

(3)  $3 - 5e^{2t} + 4 \sin t - 7 \cos 3t$

(4)  $e^{6t} + e^{-t} \cos 3t - 4$

(5)  $t^3 - t^2 - 3t$

(6)  $e^{-2t} \sin 2t - t^2 e^{3t}$

(7)  $e^{-2t} + 4e^{-3t}$

(8)  $(t^2 + 1)^2$

(9)  $t(\sin t + e^{-t})$

- (10)  $(t^2 - 1)^4$   
 (11)  $t e^{2t} \cos 5t$   
 (12)  $3e^{4t} - e^{-2t}$   
 (13)  $\sin^2 t$   
 (14)  $t \cos^3 t$   
 (15)  $e^{-2t}(5 \sin 2t - 2 \cos 2t)$   
 (16)  $\sin 2t \sin 5t$   
 (17)  $t e^{-t} \sin t$

استخدم نظرية ٥ لإيجاد :

- (18)  $L \{t \cos bt\}$   
 (19)  $L \{t^2 \cos bt\}$

## ١٢-٤ تحويل لابلاس العكسي

في البند ١٢-٢ عرفنا تحويل لابلاس بأنه مؤثر تكاملي يؤثر على دالة  $f(t)$  فيكون الناتج دالة  $F(s)$ . وفي هذا البند سندرس مسألة إيجاد الدالة  $f(t)$  بمعلومية التحويل  $F(s)$ ، أي أننا نبحث عن الدالة العكسية لتحويل لابلاس .

تعريف ١. يقال عن الدالة  $f(t)$  ( ويشار إليها بالرمز  $\{F\}^{-1}$  ) أنها تحويل لابلاس العكسي للدالة  $F(s)$  إذا كانت  $f(t)$  متصلة على الفترة  $[0, \infty)$  وتحقق المعادلة

$$L \{f\}(s) = F(s) \quad (1)$$

ملاحظة. في حالة كون جميع الدوال المحققة للمعادلة ( 1 ) غير متصلة على الفترة  $[0, \infty)$ ، فإننا نختار دالة متصلة قطعياً محققة للمعادلة ( 6 ) لتمثل  $\{F\}^{-1}$ . وعليه فإن تحويل لابلاس العكسي قد لا يكون وحيداً، إلا أنه إذا كانت كل من الدالتين  $f_1(t), f_2(t)$  متصلة على الفترة  $[0, \infty)$ ، وكان  $L \{f_1(t)\} = L \{f_2(t)\}$ ، فإن ذلك يقتضي تحقق المعادلة  $f_1(t) = f_2(t)$ .

أما الآن فيمكننا الاستعانة بالجدول ١٢-١ للحصول على الجدول التالي :

$F(s)$	$L^{-1}\{F\}(t)$
$1/s, s > 0$	1
$1/(s-a), s > 0$	$e^{at}$
$n! / s^{n+1}, s > 0$	$t^n; n = 1, 2, \dots$
$n! / (s-a)^{n+1}, s > a$	$t^n e^{at}; n = 0, 1, \dots$
$b / (s^2 + b^2), s > 0$	$\sin bt$
$s / (s^2 + b^2), s > 0$	$\cos bt$
$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > 0$	$e^{at} \sin bt$
$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > 0$	$e^{at} \cos bt$

جدول ١٢-٢

بعض تحويلات لابلاس العكسية

نظرية ١ . بافتراض أن كلامن  $L^{-1}\{F_1\}$  و  $L^{-1}\{F_2\}$  موجود ومتصل على الفترة  $[0, \infty)$ ، و  $c$  أي ثابت، عندها يكون لدينا

$$L^{-1}\{F_1 + cF_2\} = L^{-1}\{F_1\} + cL^{-1}\{F_2\}$$

وفيما يلي تستعرض بعض الأمثلة التي تعتمد أساسا على النظرية ١

والجدول ١٢-٢.

مثال ١. أوجد  $L^{-1}\left\{s^{-4}\right\}$ .

الحل : باستعمال الخاصية الخطية لتحويلات لابلاس العكسية نجد أن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3!}{3! s^4}\right\} = \frac{1}{3!} L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}$$

ومن جدول ١٢-٢ نحصل على

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{6}.$$

مثال ٢. أوجد  $L^{-1}\left\{\frac{4}{s-5} - \frac{7s}{s^2+9} + \frac{5}{2s^2+8s+10}\right\}$ .

الحل : باستعمال الخاصية الخطية نجد أن

$$\begin{aligned} I &= L^{-1}\left\{\frac{4}{s-5} - \frac{7s}{s^2+9} + \frac{5}{2s^2+8s+10}\right\} \\ &= 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} - 7L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} \end{aligned}$$

وباستعمال الجدول ١٢-٢ نحصل على قيمتي المدين الأوليين

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = e^{5t}, \quad L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} = \cos 3t$$

ولإيجاد قيمة الحد الثالث تكمل المربع في المقام ليكون  $(s+2)^2 + 1$  . وباستعمال

الجدول ١٢-٢ مرة أخرى نجد أن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\} = e^{-2t} \sin t$$

ومن ثم فالجواب النهائي هو

$$I = 4e^{5t} - 7 \cos 3t + \frac{5}{2} e^{-2t} \sin t$$



مثال ٢. أوجد  $L^{-1} \left\{ \frac{2s+1}{s^2+9} \right\}$ .

الحل : باستعمال الخاصية الخطية والجدول ١٢-٢ نجد أن

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{2s+1}{s^2+9} \right\} &= 2L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+9} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+9} \right\} \\ &= 2L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+3^2} \right\} + \frac{1}{3} L^{-1} \left\{ \frac{3}{s^2+3^2} \right\} \\ &= 2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \end{aligned}$$

الكسور الجزئية . للكسور الجزئية نور هام في إيجاد تحويلات لابلاس العكسية .  
وسنذكر هنا بإيجاز الحالات الثلاث المهمة من الكسور الجزئية ، وهي كما يلي :

١ - الكسور التي يحتوي مقامها على عوامل خطية مختلفة مثل

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)(s+6)}$$

٢ - الكسور التي يحتوي مقامها على عوامل خطية مكررة مثل

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s-2)^3}$$

٣ - الكسور التي يحتوي مقامها على مقدار من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل ،

ومثال ذلك

$$F(s) = \frac{3s-5}{s^2(s^2+9)}$$

حيث لا يوجد للمقدار  $s^2+9$  جذور حقيقية .

وفيما يلي نضرب مثالا لكل من هذه الحالات الثلاث المختلفة .

مثال 4. أوجد  $L^{-1}\{F\}$  حيث

$$F(s) = \frac{7s - 1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

الحل : حيث أن المقام يتكون من ثلاثة عوامل خطية مختلفة ، فإنه يمكن إعادة كتابة  $F(s)$  على النحو

$$\frac{7s - 1}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3} \quad (2)$$

حيث  $A, B, C$  أعداد حقيقية نسمى لإيجاد قيمها .

وهناك طريقتان مختلفتان لإيجاد الأعداد أو الثوابت  $A, B, C$  ، الأولى منها تتلخص في ضرب طرفي المعادلة (2) بمقام الطرف الأيسر ، وبذلك تحصل على كثيرتي حدود متطابقتين . وبمساواة معاملات  $s^k$  ننتهي إلى نظام من المعادلات الخطية الذي يمكن حله لإيجاد الثوابت المجهولة  $A, B, C$  . ولنكتب ذلك رياضيًا على النحو

$$7s - 1 = A(s+2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s+2) \quad (3)$$

والتي يمكن اختصارها إلى المعادلة

$$7s - 1 = (A+B+C)s^2 + (-A-2B+3C)s + (-6A-3B+2C)$$

ومن ثم نحصل على النظام الخطي

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A-2B+3C &= 7 \\ -6A-3B+2C &= -1 \end{aligned}$$

وبحل النظام نجد أن

$$A=2, B=-3, C=1$$

هذه طريقة ، أما الطريقة الأخرى لإيجاد قيم الثوابت  $A, B, C$  من المعادلة (3) فتتلخص في اختيار ثلاثة قيم مختلفة لـ  $s$  والتعويض عنها في المعادلة (3) . ولرأحسنا اختيار هذه القيم الثلاث لسهل علينا إيجاد المطلوب . ففي مثالنا هذا سنقوم باختيار  $s = -1, -2, 3$  والتي تشكل جذور مقام  $F(s)$  . فاستعمال

التعويض  $s = -1$  في المعادلة (3) يؤدي إلى

$$\begin{aligned} -7 - 1 &= A(1)(-4) + B(0) + C(0) \\ -8 &= -4A \end{aligned}$$

أو  $A = 2$  . ثم نضع  $s = -2$  في (3) لنحصل على

$$\begin{aligned} -14 - 1 &= A(0) + B(-1)(-5) + C(0) \\ -15 &= 5B \end{aligned}$$

أو  $B = -3$  . وأخيرا نضع  $s = 3$  في (3) لنجد بطريقة مماثلة قيمة  $C$  المساوية

1 . ومن ثم ننتهي إلى صيغة الكسور الجزئية المطلوبة

$$\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s-3}$$

وبالتالي نجد أن

$$\begin{aligned} L^{-1}\{F\}(t) &= L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\}(t) + L^{-1}\left\{\frac{-3}{s+2}\right\}(t) + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t) \\ &= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t) - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t) \\ &= 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t} \end{aligned}$$

مثال ٥ . اوجد  $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}$  .

الحل : لنفترض أن

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3}$$

وبالتالي

$$s+1 = As(s+2)^3 + B(s+2)^3 + Cs^2(s+2)^2 + Ds^2(s+2) + Es^2$$

باختيار  $s = 0$  و  $s = -2$  نحصل بالترتيب على

$$1 = B(2)^3, \quad -1 = E(-2)^2$$

أو

$$B = \frac{1}{8} , E = \frac{1}{4}$$

وبمساواة معاملات  $s$  ,  $s^3$  ,  $s^4$  نحصل على

$$0 = A + C$$

$$0 = 6A + B + 4C + D$$

$$1 = 8A + 12B$$

ومن ثم نحصل على

$$A = \frac{-1}{16} , C = \frac{1}{16} , D = 0$$

وأخيرا نستعمل القاسية الخطية ونتائج الجدول ١٢-٢ لنحصل على

$$\begin{aligned} L^{-1} \left| \frac{s+1}{s^2(s+2)^3} \right| (t) &= L^{-1} \left| -\frac{1}{16s} + \frac{1}{8s^2} + \frac{1}{16(s+2)} - \frac{1}{4(s+2)^3} \right| (t) \\ &= -\frac{1}{16} L^{-1} \left| \frac{1}{s} \right| (t) + \frac{1}{8} L^{-1} \left| \frac{1}{s^2} \right| (t) \\ &\quad + \frac{1}{16} L^{-1} \left| \frac{1}{s+2} \right| (t) - \frac{1}{8} L^{-1} \left| \frac{2}{(s+2)^3} \right| (t) \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8} t + \frac{1}{16} e^{-2t} - \frac{1}{8} t^2 e^{-2t} \\ &= \frac{1}{16} (2t + e^{-2t} - 2t^2 e^{-2t} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{مثال ٦. أوجد } L^{-1} \left| \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)} \right|$$

الحل : في البداية نلاحظ أن المقام يحتوي على المعامل  $s^2 - 2s + 5$  وهو غير قابل للاختصار لأن ليس له جذور حقيقية ، وبالتالي فإننا نكتب هذا المقدار في الصيغة  $(s - \alpha)^2 + \beta$  عن طريق إكمال المربع .

$$s^2 - 2s + 5 = (s - 1)^2 + 2^2$$

ولأن كلامنا  $s^2 - 2s + 5$  و  $s + 1$  لا يتكرر في المقام ، فإن صيغة الكسور الجزئية

تكون على النحو

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} = \frac{A(s - 1) + 2B}{(s - 1)^2 + 2^2} + \frac{C}{s + 1}$$

وبضرب الطرفين في المقام المشترك نحصل على

$$2s^2 + 10s = [A(s - 1) + 2B](s + 1) + C(s^2 - 2s + 5) \quad (3)$$

وباستعمال التعميخ  $s = -1$  نجد أن

$$2 - 10 = [A(-2) + 2B](0) + C(8)$$

أو

$$-8 = 8C$$

وبالتالي  $C = -1$  . وبأخذ  $s = 1$  نحصل على

$$2 + 10 = [A(0) + 2B](2) + C(4)$$

وبما أن  $C = -1$  ، فإن المعادلة الأخيرة تصبح على النحو

$$12 = 4B - 4$$

وبالتالي

$$B = 4$$

وأخيرا نضع  $s = 0$  في (3) ونعرض عن قيمتي  $B$  ،  $C$  لنصل إلى

$$0 = [A(-1) + 2B](1) + C(5) = -A + 8 - 5$$

أو

$$A = 3$$

وأخيرا نجد الدالة المطلوبة

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} \right] (t) &= L^{-1} \left[ \frac{3(s - 1) + 2(4)}{(s - 1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s + 1} \right] (t) \\ &= 3L^{-1} \left[ \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 2^2} \right] (t) \\ &\quad + 4L^{-1} \left[ \frac{2}{(s - 1)^2 + 2^2} \right] (t) - L^{-1} \left[ \frac{1}{s + 1} \right] (t) \\ &= 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t - e^{-t} . \end{aligned}$$

## تمارين

أوجد  $L^{-1}\{F\}$  حيث  $F(s)$  معطى بالمعادلات التالية :

$$(1) \frac{s+1}{s^2+2s+10}$$

$$(2) \frac{2}{s^2+4}$$

$$(3) \frac{3s}{s^2+4s+13}$$

$$(4) \frac{3}{(2s+5)^3}$$

$$(5) \frac{1}{s^2+2s+10}$$

$$(6) \frac{s}{s^2+4s+4}$$

$$(7) \frac{s}{s^2+6s+13}$$

$$(8) \frac{s-1}{2s^2+s+6}$$

$$(9) \frac{2s-3}{s^2-4s+8}$$

$$(10) \frac{2s+3}{(s+4)^3}$$

$$(11) \frac{s^3}{(s-1)^4}$$

$$(12) \frac{3s+1}{s^2+6s+13}$$

$$(13) \frac{2(s+8)}{s^2+4s+13}$$

$$(14) \frac{s}{(s-1)^4}$$

$$(15) \frac{2s - 10}{s^2 - 4s + 20}$$

$$(16) \frac{s + 11}{(s - 1)(s + 3)}$$

$$(17) \frac{5s^2 + 34s + 53}{(s + 3)^2(s + 1)}$$

$$(18) \frac{s - 11}{(s - 2)(s + 1)(s - 3)}$$

$$(19) \frac{s + 17}{(s - 1)(s + 3)}$$

$$(20) \frac{7s^2 + 23s + 30}{(s - 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$(21) \frac{1}{s^3(s^2 + 1)}$$

$$(22) \frac{2s^2 + 5s - 4}{s^3 + s^2 - 2s}$$

$$(23) \frac{4(s + 1)}{s^2(s - 2)}$$

$$(24) \frac{5s - 2}{s^2(s + 2)(s - 1)}$$

$$(25) \frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, a^2 \neq b^2, ab \neq 0$$

## ١٢-٥ حل مسألة القيمة الابتدائية

وكما جاء في مقدمة هذا الباب ، فإن الهدف الرئيسي هو الإفادة من تمويلات

لابلاس في حل المسائل الابتدائية للمعادلات التفاضلية الخطية ، مع التركيز على

المعادلات ذات الرتبة الثانية .

ومن المعلوم أنا قد درسنا حلول هذه المسائل من قبل باستعمال طرق أخرى مختلفة . ولكن كل هذه الطرق السابقة كانت تتطلب إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية ، ومن ثم التعويض بالقيم الابتدائية لإيجاد الحل المطلوب . أما بالنسبة لطريقة الحل باستعمال تحويلات لابلاس ، فإننا نجد حل المسألة الابتدائية دون الحاجة لإيجاد الحل العام .

ولا تقتصر تطبيقات تحويلات لابلاس على إيجاد حل المسألة الابتدائية للمعادلة التفاضلية ذات المعاملات الثابتة فحسب ، وإنما تتجاوز ذلك إلى المعادلات ذات المعاملات المتغيرة .

وأهمية أخرى تكتسبها طريقة تحويلات لابلاس ناتجة عن إمكانية تطبيقها حتى على المعادلات غير المتجانسة التي يكون طرفها الأيمن غير الصفري مساو لدالة غير متصلة ، ولكننا لن نعالج هذه الحالة في هذا الباب .  
وسنبدأ هذا البند بذكر خطوات طريقة تحويلات لابلاس لحل المسألة الابتدائية .

### طريقة تحويلات لابلاس

إيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية نتبع الخطوات التالية :

- أ - نجد تحويل لابلاس لطرفي المعادلة عن طريق استخدام الخصائص المختلفة لتحويلات لابلاس إضافة إلى الشروط الابتدائية للمعادلة وذلك للحصول على معادلة تحتوي على تحويل لابلاس للحل المطلوب ثم نحل هذه المعادلة حلا جبريا لإيجاد تحويل لابلاس للحل المطلوب .
- ب - نجد تحويل لابلاس العكسي للتحويل الناتج من (أ) باستعمال الجدول ١٢-٢ أو باستعمال طريقة مناسبة كالكسور الجزئية مثلا إضافة إلى الجدول ١٢-٢ لنحصل على الحل المطلوب .

وقبل أن نشرع في إعطاء الأمثلة نحب أن نذكر هنا بمعادلتين هامتين ( انظر النظرية ٢ والنظرية ٣ في البند ١٢-٢ ) ، وهما :



$$L \{y'\}(s) = s L \{y\}(s) - y(0) \quad (1)$$

$$L \{y''\}(s) = s^2 L \{y\}(s) - s y'(0) - y''(0) \quad (2)$$

مثال ١. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}; y(0) = 2, y'(0) = 12 \quad (3)$$

الحل : حيث أن المعادلة (3) متطابقة بين دالتين في المتغير  $t$  فلا بد أن يتطابق تحويل لابلاس للطرفين ، أي أن

$$L \{y'' - 2y' + 5y\}(s) = L \{-8e^{-t}\}(s)$$

وباستعمال الخاصية الخطية لتحويل لابلاس وكذلك جدول ١٧-١ نحصل على

$$L \{y''\}(s) - 2L \{y'\}(s) + 5L \{y\}(s) = \frac{-8}{s+1}$$

الآن نستعمل المعادلتين (1) ، (2) ، وللاختصار والسهولة نضع  $Y(s) = L \{y\}(s)$  وبالتالي

$$L \{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$$

$$L \{y''\}(s) = s^2 Y(s) - s y'(0) - y''(0) = s^2 Y(s) - 2s - 12$$

وبالتعويض عن هاتين القيمتين في المعادلة (3) ، والحل لإيجاد  $Y(s)$  نحصل على

$$\{s^2 Y(s) - 2s - 12\} - 2\{sY(s) - 2\} + 5Y(s) = \frac{-8}{s+1}$$

أو

$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) = 2s + 8 - \frac{8}{s+1} = \frac{2s^2 + 10s}{s+1}$$

ومنه

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}$$

ويتبقى علينا الآن إيجاد تحويل لابلاس العكسي للدالة الكسرية  $Y(s)$  ، ولكننا قد فعلنا ذلك في مثال ٦ من البند السابق باستعمال الكسور الجزئية حيث وجدنا أن

$$y(t) = 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t - e^{-t}$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة (3) .

مثال ٢. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-s}; \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (4)$$

الحل :

$$L\{y''\}(s) + 4L\{y'\}(s) + 6L\{y\}(s) = L\{1\}(s) + L\{e^{-s}\}(s)$$

أو

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

ومنه

$$(s^2 + 4s + 6) Y(s) = \frac{2s + 1}{s(s+1)}$$

وبالتالي

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s(s+1)(s^2 + 4s + 6)}$$

وبتطبيق طريقة الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{2s + 1}{s(s+1)(s^2 + 4s + 6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4s + 6}$$

وهذا يؤدي إلى المعادلة

$$2s + 1 = A(s+1)(s^2 + 4s + 6) + Bs(s^2 + 4s + 6) + (Cs + D)s(s+1)$$

وباختيار  $s = 0$  ثم  $s = -1$  نحصل على  $A = \frac{1}{6}$ ,  $B = \frac{1}{3}$  وبمساواة معاملات

$s^3$ ,  $s$  نحصل على

$$A + B + C = 0$$

$$10A + 6B + D = 2$$

وبحل هاتين المعادلتين انما ينتج لدينا أن  $C = \frac{-1}{2}$ ,  $D = \frac{-5}{3}$  . وبالتالي

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(1/6)}{s} + \frac{(1/3)}{s+1} + \frac{(-s/2) - (-5/3)}{s^2 + 4s + 6} \\ &= \frac{1}{6s} + \frac{1}{3(s+1)} + \frac{(-1/2)(s+2) - (2/3)}{(s+2)^2 + 2} \\ &= \frac{1}{6s} + \frac{1}{3(s+1)} - \frac{1}{2} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 2} - \frac{2}{3} \frac{1}{(s+2)^2 + 2} \end{aligned}$$

وأخيرا نجد  $y(t)$  باستعمال الجدول ١٢-١ والخاصية الخطية لتحويل لابلاس العكسي

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{6} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} (t) + \frac{1}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} (t) \\ &\quad - \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2 + 2} \right\} (t) - \frac{2}{3\sqrt{2}} L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2 + 2} \right\} (t) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \cos \sqrt{2} t - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-2t} \sin \sqrt{2} t \end{aligned}$$

مثال ٣. أوجد حل المسألة الابتدائية

$$y'' + 16y = \cos 4t ; y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (5)$$

الحل : من الواضح أن بإمكاننا استعمال طريقة تغير الوسطاء لإيجاد حل هذه المعادلة التفاضلية بشروطها الابتدائية المعطاة ، ولكن هذه الطريقة تتطلب منا حساب قيم الثوابت التي تظهر في الحل العام  $y = y_c + y_p$  . أما اتباع طريقة تحويلات لابلاس فسيجنبنا بلا شك هذا حساب قيم هذه الثوابت ، فبعد التأثير بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة (5) واستعمال المعادلتين (1) ، (2) نحصل على

$$(s^2 + 16)Y(s) = 1 + \frac{s}{s^2 + 16}$$

أو

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{4}{(s^2 + 16)} + \frac{1}{8} \left( \frac{8s}{(s^2 + 16)^2} \right) \end{aligned}$$

وإذا

$$y(t) = L^{-1} \{ Y(s) \} (t) = \frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{4}{s^2 + 16} \right\} (t) + \frac{1}{8} L^{-1} \left\{ \frac{8s}{(s^2 + 16)^2} \right\} (t)$$

من الجدول ١٢-٢ نجد الحد الأول من الطرف الأيمن . أما بالنسبة للحد الثاني فنستعمل النظرية ٤ في البند ١٢-٢ بعد أخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين

ووضع  $F(s) = \frac{4}{s^2 + 16}$  . ومن ثم نجد أن الحل الخاص المطلوب للمعادلة ( 5 ) هو

$$y(t) = \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{8} t \sin 4t$$

من الملاحظ حتى الآن أن مسائل القيمة الابتدائية التي عالجنها في الأمثلة السابقة كانت كلها ذات معاملات ثابتة ، فماذا لو كان أحد هذه المعاملات متغيرا ؟ والجواب أن ذلك لا يؤثر كثيرا على وجود الحل أو طريقة إيجادها طالما وُجدت تحويلات لابلاس لطرفي المعادلة ، لكن هناك حقيقة هامة قد يعتمد عليها إيجاد الحل ، سنذكر نصها هنا دون برهان .

نظرية ١٠ . إذا كانت  $f$  دالة متصلة قطعيا على الفترة  $[0, \infty)$  وذات رتبة أسية ، فإن

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L\{f\}(s) = 0$$

مثال ٤ . أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + 2t y' - 4y = 1 ; y(0) = 0 = y'(0) \quad (6)$$

الحل : بالتأثير بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة ( 6 ) ينتج لدينا

$$L\{y''\}(s) + 2L\{ty'\}(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s} \quad (7)$$

من المعادلة ( 2 )

$$L\{y''\}(s) = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) = s^2 Y(s) \quad (8)$$

أما المعادلة ( 3 ) من البند ١٢-٣ فتعطينا

$$\begin{aligned} L\{t y'(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds} [L\{y'(t)\}(s)] \\ &= -\frac{d}{ds} [s Y(s) - y(0)] \\ &= -s Y'(s) - Y(s) \end{aligned} \quad (9)$$

وبالتعويض من (8) و (9) في المعادلة (7) نحصل على

$$s^2 Y(s) + 2[-sY'(s) - Y(s)] - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

أو

$$-2sY'(s) + (s^2 - 6)Y(s) = \frac{1}{s}$$

أو

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y(s) = -\frac{1}{2s^2} \quad (10)$$

والمعادلة (10) معادلة خطية من الرتبة الأولى لها عامل مكاملة هو

$$u(s) = e^{\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right) ds} = e^{\ln s^3 - \frac{s^2}{4}} = s^3 e^{-\frac{s^2}{4}}$$

ومن ثم نضرب المعادلة (10) في  $u(s)$  لنجد أن

$$\frac{d}{ds} \{u(s)Y(s)\} = \frac{d}{ds} \left[ s^3 e^{-\frac{s^2}{4}} Y(s) \right] = -\frac{s}{2} e^{-\frac{s^2}{4}}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على

$$s^3 e^{-s^2/4} Y(s) = - \int \frac{s}{2} e^{-s^2/4} ds = e^{-s^2/4} + c$$

وبضرب الطرفين في  $s^{-3} e^{s^2/4}$  ننتهي إلى المعادلة

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + c \frac{e^{s^2/4}}{s^3}$$

الآن نلجأ إلى النظرية ١ أعلاه فنقول إن المعادلة

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0$$

لا تتحقق إلا إذا تحقق الشرط

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{c e^{s^2/4}}{s^3} = c \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{s^2/4}}{s^3} = 0$$

وحيث أن

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{s^2/4}}{s^3} = \infty$$

فلا بد أن يكون  $c = 0$  . وعليه فإن

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}$$

ومنه

$$L^{-1}\{Y(s)\}(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t)$$

أو

$$y(t) = \frac{t^2}{2}$$

ومن السهل التأكد أن  $y(t)$  هو الحل المطلوب للمعادلة ( 6 ) وذلك بمجرد التعويض فيها .

## ٦-١٢ ملخص الباب

لقد رأينا في هذا الباب كيف أن تحويلات لابلاس تساهم إلى حد كبير في عملية تبسيط إجراءات حل مسألة القيمة الابتدائية لبعض المعادلات التفاضلية ، خاصة عندما يكون الطرف الأيمن دالة متصلة قطعياً وليست متصلة على كامل الفترة  $[0, \infty)$  .

وقد عرفنا تحويل لابلاس  $L\{f\}$  لدالة  $f$  بأنه التكامل المعتل

$$L\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

لجميع قيم  $s$  التي تحقق وجود التكامل المعتل .

وقد علمنا أيضاً أن  $L\{f\}(s)$  يتأكد وجوده لجميع قيم  $s$  الأكبر من  $\alpha$  إذا كانت  $f$  متصلة قطعياً على الفترة  $[0, \infty)$  ومن الرتبة الأسية  $\alpha$  .

ويمكن اعتبار تحويل لابلاس يانه مؤثر تكاملي يؤثر على دالة  $f(t)$  فيكون الناتج دالة  $F(s)$ .

ولتحويلات لابلاس خصائص عديدة نكرنا منها ما نحتاج اليه في هذا الباب

وهما :

١- الخاصية الخطية .

ب- خاصية الازاحة .

ثم وجدنا تحويلات لابلاس للمشتقة ، ومشتقة تحويل لابلاس ، وكذلك المشتقات ذات الرتب العليا لتحويل لابلاس .

أما البند ١٢-٤ فقد تناولنا فيه تحويل لابلاس العكسي والخاصية الخطية ، ثم عرضنا لأهمية الكسور الجزئية في إيجاد هذه التحويلات العكسية .

وأما البند ١٢-٥ فقد منبِت فيه زبدة البنود السابقة حيث عالِجنا فيه كيفية إيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية بطريقة تحويلات لابلاس . ورأينا أن استعمال هذه الطريقة يوجد لنا الحل النهائي مباشرة دون الحاجة إلى المرور بمرحلة افتراض حل على صورة معينة وذي ثوابت مجهولة ثم العمل على إيجاد هذه الثوابت كما كان الحال في طريقتي تغير النسطاء واختزال الرتبة أو غيرها مما سبق .

## ١٢-٧ تمارين عامة

باستعمال طريقة تحويلات لابلاس ، أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية المعطاة

في التمارين من ١ إلى ١٥ :

$$(1) \quad y'' + 4y' - 5y = t e^t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$(2) \quad y'' + 2y' + y = 3t e^{-t}; \quad y(0) = 4 = 2y'(0)$$

$$(3) \quad y' = e^t; \quad y(0) = 2$$

$$(4) \quad y' = 2e^t; \quad y(0) = -1$$

$$(5) \quad y'' - 2y' = -4; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

$$(6) \quad y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$$

$$(7) \quad y'' + 5y' - 6y = 21e^t; \quad y(0) = -1 = y'(0) - 10$$

$$(8) \quad y'' + 9y' = 40e^x; \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2$$

$$(9) \quad y'' + y = t; \quad y(\pi) = y'(\pi) = 0$$

$$(10) \quad y'' + y = 4e^t; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(11) \quad y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(12) \quad y'' + 3y' + 2y = 4t^2; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(13) \quad y'' + y = \sin t; \quad y(0) = 1 = -y'(0)$$

$$(14) \quad y'' - y' = e^t \cos t; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(15) \quad y'' - 4y' + 4y = 4 \cos 2t; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

في التمارين من ١٦ إلى ٢٥ أوجد تحويل لابلاس للحل  $y(t)$  لكل من المسائل الابتدائية المعطاة ، أي أوجد  $Y(s)$  فقط :

$$(16) \quad y'' - 3y' + 2y = \cos t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

$$(17) \quad y'' + 2y' + y = t; \quad y(0) = -3, \quad y(1) = -1$$

$$(18) \quad y'' + 6y = t^2 - 1; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

$$(19) \quad y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(20) \quad y'' - 6y' + 5y = te^t; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

$$(21) \quad y'' + 4y = \cos 4t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(22) \quad y'' - 2y' + y = \cos t - \sin t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

$$(23) \quad y'' + \beta^2 y = A \sin \omega t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$(24) \quad y'' - y = g(t); \quad y(0) = 1 = y'(0) - 1, \quad g(t) = \begin{cases} 1, & t < 3 \\ t, & t > 3 \end{cases}$$

$$(25) \quad y'' - 3y' + 2y = 12e^{4t}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

أوجد حل كل من المعادلتين التفاضلتين التاليتين من الرتبة الثالثة :

$$(26) \quad y''' - y'' + y' - y = 0; \quad y(0) = 1 = y'(0), \quad y''(0) = 3$$

$$(27) \quad y''' + 4y'' + y' - 6y = -12; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = -2$$



مراجع منقاة



بويس ، ولیم ودیرما ، ریشارد ، مبادئ المعادلات التفاضلية ، ترجمة أحمد علاونة وحسن الجزة ، الطبعة الثالثة .  
نيويورك : دار جون وايلي وأبنائه ، ١٩٨٣ م .

**Brauer, F. and Nohel, J.A.**, *Ordinary Differential Equations: a First Course*, 2nd ed., W.A. Benjamin, Inc., Menlo Park, CA., 1973.

**Derrick, W.R. and Grossman, S.I.**, *Elementary Differential Equations with Applications*, Addison-Wesely Publ. Co., Reading, MA., 1976.

**Nagle, R.K. and Saff, E.B.**, *Fundamentals of Differential Equations*, Benjamin/Cummings Publ. Co., Inc., Menlo Park, CA., 1981.

**Rainville, E.D. and Bedient, P.E.**, *Elementary Differential Equations*, 6th ed., Macmillan Publ. Co., Inc., New York, 1981.

**Simmons, G.F.**, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill, New York, 1973.

**Spiegel, M.R.**, *Applied Differential Equations*, 3rd ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1981.

**Zill, D.G.**, *A First Course in Differential Equations with Applications*, 2nd, ed., Prindle, Weber and Schmidt, 1982.



أجوبة التمارين



## البند ۲-۲

1.  $y \ln |c(1-x)| = 1$
2.  $y = \frac{1}{2} \sin 2x + c$
3.  $3y = 2e^{-3x} + c$
4.  $\sin y \cos x = c$
5.  $\cos x - \ln |\sec x + \tan x| = c$
6.  $y = cx^4$
7.  $y = (x^3 - 3x + c)^{1/3}$
8.  $y = ce^{-x^2}$
9.  $\ln |y| = 2x - \cos x + c$
10.  $(x+1)^2 + y^2 + 2 \ln |c(x-1)| = 0$
11.  $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$
12.  $x^2 + \tan^2 y = c^2$
13.  $\ln |y| + y^2 = c - \cos x$
14.  $y = 1/(c - e^{\cos x})$
15.  $c^2 y^2 = 4 + e^{2x}$
16.  $x \ln x + y \ln y = c$
17.  $y = \sqrt{5x-1}$
18.  $y = -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1+4x^3+8x^2+8x})$
19.  $(1 + \cos x)(1 + e^y) = 4$
20.  $x = \tan (4t - 3\pi/4)$
21.  $y = 4e^{x^2/3} - 1$
22.  $y = -3e^{-(1+\cos x)}$
23.  $xy = e^{-(1+x^{-1})}$
24.  $y = \tan [\pi/3 - \ln |\cos x|]$
25.  $(x/2)^{2/3}$
26.  $y = -(x/2)^{2/3}$

## البند ۳-۲

1.  $x^2 + 4x + (3/2)y^2 - y = c$
2.  $x^2 + 4xy + y^2 = c$
3.  $xy^2 - x^2y + 3x^2 - 2y = c$
4.  $x^2 = cy(y+2)^3$
5.  $y(x+1)^3 = cx$
6.  $x \sin y + y \cos x - y^2/2 = c$
7.  $x^2 + \sin(xy) = c$
8.  $(w^2 + z^2)^2 = 4wz + c$
9.  $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$
10. not exact
11.  $x^2y - x \tan y = c$
12.  $y = cx^2$
13.  $x + y + xy - 3 \ln |xy| = c$
14.  $y = [c + e^t(t-1)]/(1+e^t)$
15.  $\sin x \cos y = \ln |c \sin x|$
16.  $2 \tan^{-1} x + \ln(1+y^2) = c$
17. not exact
18.  $xy(x^2 - 3) = 4(1 - y^2)$
19.  $(1/3)x^3 + x^2y + xy^2 - y = 4/3$
20.  $e^{xy} = 2xy^3 + y^2 - 3$
21.  $4xy + x^2 - 5x + 3y^2 - y = 8$
22.  $xy + 2y + e^x + ye^y - e^y = c$
23.  $(xy-2)^2 + (x+3)^2 = 2y^2 + 15$

البند ٥-٢

1.  $\ln(x^2 + y^2) + 4 \tan^{-1}(y/x) = c$
2.  $x^2 = 6y^2 \ln |y/c|$
3.  $(x-y) \ln |x-y| = y + c(x-y)$
4.  $\ln(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1}(y/x) = c$
5.  $y^2 = 2x^2 \ln |x/c|$
7.  $(3v+u)^2 = c(v-u)$
8.  $(y/x)^2 = 2 \ln |x| + c$
10.  $y^9 = c(x^3 + y^3)^2$
11.  $x(y+x)^2 = c(y-2x)$
12.  $y = ce^{2\sqrt{xy}}$
13.  $y^3(x+y) = ce^{x/y}$
14.  $(x-y) \ln x + y \ln y = cx + y$
15.  $y \ln |cy| = (y-x) e^{x/y}$
17.  $e^{2x/y} = 8 \ln |y| + c$
18.  $y^3 + 3x^3 \ln |x| = 8x^3$
19.  $2(x+2y) + (x+y) \ln |x+y| = 0$
20.  $y^2 = 4x(x+y)^2$
21.  $4(2y+x) \ln y = 2y - x$
22.  $\ln |x| = e^{y/x} - 1$
24.  $3x^3 - x^2y - 2y^2 = 0$
25.  $y + 3x = (y+4x) \ln (y+4x)$

البند ٦-٢

1.  $y = 2(x+1)^{-1} + c(x+1)^{-3}$
2.  $y = ce^{-5x} + 1/10$
3.  $y = e^{3x/2} + ce^x$
4.  $y = ce^{-x^2} + 1/3$
5.  $y \sin x = x + c$
6.  $x = -(4/5)y^2 + cy^{-1/2}$
7.  $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}$
8.  $y(e^x + 1) = c$
9.  $y = 2(3x-1)^{1/3} + c(3x-1)^2$
11.  $y = x + c(1+x^2)^{1/2}$
10.  $y(\sec x + \tan x) = x - \cos x + c$
12.  $y = e^{-3x}(1+cx^{-1})$
13.  $xv^2 = ce^v + v + 1$
14.  $y = e^{-x} \ln(e^x + e^{-x}) + ce^{-x}$
16.  $y = (1 + \cos x)(x - \sin x + c)$
15.  $3y \cos^3 x = 3 \sin x - \sin^3 x + c$
17.  $y = (5/3)(x+2)^{-1} + c(x+2)^{-4}$
18.  $xy^2 = (1/2)(y^2 - y + 1/2) + ce^{-y}$
19.  $2y = |2x+3|^{1/2} \ln |2x+3|$
20.  $2y = x^2 - 1 + 2e^{1-x^2}$
21.  $(1+x)t^{2/3} = 2$
22.  $y(x-2) = 2x$
23.  $y^2 - 2xy + 16 = 0$
24.  $y = 2x + 2e^{-2x} - 1$
25.  $(x+1)y = x \ln |x| - x + 21$
26.  $y = \cos x (\sin x - 1)$
27.  $y = 2x - 1$
28.  $y = e^{3x}(x-1) + e^{2x}(3-x^2/2)$



## البند ٢-٨

1.  $e^x + ye^{-x} = c$

2.  $x + 1 = y + ce^{-y}$

3.  $y(x+1) = cx(y+1)$

4.  $x^2y - x^3 + y^{-2} = c$

5.  $x(x+2y) = c$

6.  $2y^2 + x^2 = 9x^6$

7.  $y = (7 \ln |x| + c)^{-1/n}$

8.  $\tan^{-1}(x/t) + (1/2) \ln \left[ \frac{x^2}{t^2} + 1 \right] + \ln |ct| = 0$

9.  $e^{xy} - 4y^3 = 5$

10.  $x^4 - y^4 + 4xy^3 = c$

11.  $2y^2 \ln |y| - y^2 = 4xe^x - 4e^x - 1$

12.  $y^2 + 2xy - x^2 = c$

13.  $4y = x \sin 2x - 2x^2 \cos 2x$

14.  $2y^5 - 2x^2y^3 + 3x = 0$

15.  $4 \ln |\sec x + \tan x| = 2t + \sin 2t + c$

16.  $2y = x^2 - 1 + 4e^{1-x^2}$

17.  $x^3 = c(y-x)e^{y/x}$

18.  $x(3y^2 - 2x^2) = c$

19.  $2x^2 \ln |x| = y^2 - 16x^2$

20.  $2x^4y = x^2 + 2x + 2 \ln |x-1|$

21.  $x(\csc t - \cot t) = t - \sin t + c$

22.  $2(x+2y) + (x+y) \ln |x+y| = 0$

23.  $x = y \ln |cxy|$

24.  $t = x^2(1+x \ln |x|)$

25.  $y = \sin x + c \cos x$

26.  $v = u - u^3 + c(1-u^2)^{1/2}$

27.  $x(2t^2 - x) = 0$

28.  $x \sin y + yx^{-1} + \ln |x| = c$

29.  $vu = -e^{-(1+u^2)}$

30.  $2y = \sin x + (x+2) \sec x$

31.  $y^2x = ce^{2y} - (y+1)e^y$

32.  $(u+v)(u^2 - 4uv + v^2) = c$

33.  $y(1 + \sin x) = (x+2 - \cos x) \cos x$

34.  $2x^3 + 2x^2v - 3v = 0$

35.  $y(x^2 - \sin x^2) = x - c$

36.  $x^2y^2 + 2xy - x^2 = c$

37.  $y = -3(x+1)$

38.  $y = e^{x+1} - 3(x+1)$

39.  $y = 2x + 3e^{-2x} - 1$

40.  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \pi/3$

## البند ٢-٩

1.  $x(xy+1) = cy$

2.  $2x^3y - x^2 = cy^2$

3.  $xy^2 - y = cx$

4.  $1 + u^2v = cu^2v^2$

5.  $y(x^2+1) = cx$

6.  $x+y = \sqrt{x^2+y^2} + c$

7.  $2u^2e^{uv} + v^2 = cu^2$

8.  $x^2 + cxy + y^2 = 1$

9.  $x^2y + x + y = cxy^2$
10.  $\ln(x^2 + y^2) = 2xy + c$
11.  $u^2v^2 = 2 \ln |cv/uv|$
12.  $x^3 + xy^2 - 2y = cx$
13.  $2x^2 \cos(xy) = cx^2 - 1$
14.  $\ln(x^2 + y^2) + 2y - 2x = c$
15.  $\cos(uv) = ce^u$
16.  $(x^2 + y^2)^{3/2} = 3xy + c$
17.  $xy^2 - x^2 + 2y = 0$
18.  $x^3y^3 + 4y^2 - 7xy + 2x = 0$
19.  $x^2 - y^2 + \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| = c$
20.  $y + x^4 - x^2 = 0$
21.  $2x^4 = (2-x)y^2$
22.  $x^4 = y^2(1 + cx)$
23.  $\ln(x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2 + c$
24.  $x^3 - x^2y - y = cx^2$
25.  $x^2 - 2 \ln(y^2 + \sin^2 x) = c$

#### البند ٢-٤

1.  $x^2 - 2xy = c$
2.  $2x + \ln(x^2 + y^2) = c$
3.  $x^5 - 5x^3y = c$
4.  $2x^2 + xy + 2y \ln |y| = cy$
5.  $xy + \ln |y| + 2x^2 - 2x = c$
6.  $x^2 \cos 3x + 3y = cx^2$
7.  $v(2u + v) = ce^u$
8.  $x = e^{-2u} + 4e^{-3u}$
9.  $x^2 - y^2 = cy^3$
10.  $3x^2y^4 - 1 = cx^2y^2$
11.  $y^2(y^2 + 4xy - 2) = c$
12.  $u - 3v - 3 = ce^v$
13.  $x^2 \ln |x| - y = cx^2$
15.  $x^2 = 4y^2 \ln |cy|$
16.  $xy^2 = c(x + 2y)$
17.  $t^2 = 2x^2 \ln |cx^2t^{-1}|$
18.  $y^2 = 2x^2$

#### البند ٤-٤

1.  $x + 3y + c = 3 \ln |x + 2y + 2|$
2.  $\tan(6x + c) = 2/3(9x + 4y + 1)$
3.  $x + c = \tan(x + y) - \sec(x + y)$
4.  $\cos v \tan^2 u = \tan^3 u + c$
5.  $(2t + x - 1)^2 = 2t + c$
6.  $\sin x \ln y = x \cos x - \sin x + c$
7.  $(\sin^2 u + 3\cos^2 v) \sin u = c$
8.  $7(4x - y - 4) = 8 \ln \left| \frac{1}{13}(21x + 7y - 8) \right|$
9.  $\tan^{-1}(3x + y) = 2x + \frac{\pi}{4}$

## البند ٤-٥

1.  $y^2(c-x) = x^3$
2.  $(2x^3 - y)^2 = cxy^6$
3.  $y = (1 - x + ce^{-x})^{-1}$
4.  $y^2 = x(5 - x^2)$
5.  $(\beta/\alpha + ce^{\alpha(1-n)x})^{1/(1-n)} = 0$
6.  $x^2 = y^3(x+2)$
7.  $5x^2y^3 = x^5 + 4$
8.  $2y^2 = x^2(3x-1)$
9.  $y^{-2} = x^2(c-x^2)$
10.  $y^3 = 3(1-6x^{-2})\sin x + cx^{-3} + 9x^{-1}(\cos x - 2x^{-2}\cos x)$
11.  $20y^{-2} = 10x + ce^{-10x} - 1$
12.  $y^{-2} = ce^{-2x} - e^{2x}/2$
13.  $y = 5x^2/(x^5 + c)$
14.  $v^2(2u^2 \ln |u| + cu^2) = 1$
15.  $x = y^2/(c-y)$

## البند ٤-٦

1.  $(x-y-1)^2 = c(x+y-3)$
2.  $(y+2)^2 + 2(x+1)(y+2) - 3(x+1)^2 = c$
3.  $u-3 = (2-v) \ln |c(v-2)|$
4.  $\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(x + \frac{6}{5}\right)\left(y + \frac{8}{5}\right) - \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = c$
5.  $y = \frac{1}{4}(x+c)^2 - x$
6.  $\ln[(u-1)^2 + (v+2)^2] - 8 \tan^{-1}\left(\frac{u-1}{v+2}\right) = c$
7.  $\ln[(y+3)^2 + 3(x-1)^2] + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{y+3}{\sqrt{3}(x-1)}\right) = c$
8.  $(w+z-3)^3 = c(2w+z-4)^2$
9.  $\ln[(y+1)^2 + (x-1)^2] + 2 \tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x-1}\right) = c$
10.  $x+2y+c = 3 \ln |x+y+2|$
11.  $2(y+1) = -(x+2y) \ln |c(x+2y)|$
12.  $(u-2v-1)^2 = c(u-3v-2)$
13.  $\ln[9(x-1)^2 + (y-1)^2] - 2 \tan^{-1}\left(\frac{y-1}{3(x-1)}\right) = c$
14.  $3u-v+c = 5 \ln |2u-v+4|$
15.  $(2y-x+3)^2 = c(y-x+2)$

$$16. v - 1 = 3(v - 3u - 1) \ln |c(3u - v + 1)|$$

$$17. y - 1 = (x + 2y - 3) \ln |c(x + 2y - 3)|$$

$$18. 3(y - 2) = 2(1 - x) \ln [(x - 1)/2]$$

$$19. 2(u + 2v - 6) = 3(u - v) \ln \left( \frac{u - v}{3} \right)$$

$$20. 3(v - 2) = -2(u - 1) \ln \left( \frac{1 - u}{2} \right)$$

$$21. y - 5x + 8 = 2(y - x) \ln \left( \frac{y - x}{4} \right)$$

#### البند ٤-أ

$$1. y^2 - 3y - x + 1 = ce^{-x}$$

$$2. e^x + ye^{-x} = c$$

$$3. v^3 - uv + v + 1 = cu$$

$$4. y^3 - xy + y + 1 = cx$$

$$5. y = -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{4} \sin 2x + cx$$

$$6. y^5 + 4x^2 = cy$$

$$7. 2(u - 1) = (u + v - 3) \ln |c(u + v - 3)|$$

$$8. 2x^2 + 2xy - 3y^2 - 8x + 24y = c$$

$$9. (u - v + 4)^3 = c(u - 2v + 5)^2$$

$$10. y^2 \tan x = \ln |cy|$$

$$11. w^2 = z^4(1 + cz^2)$$

$$12. 15x^4y^{12} = 4y^{15} + c$$

$$13. y = 2/(1 + ce^{2x})$$

$$14. uv - u^2 - u - 4v + v^2/2 = c$$

$$15. x^3(e^y + x)^2 = c$$

$$16. y^2 = x^2 + cx^3$$

$$17. (u + v - 8)^4 = c(x - 2y + 1)$$

$$18. y(5 + xy^4) = cx$$

$$19. 2(y + 1) = -(x + 2y) \ln |c(x + 2y)|$$

$$20. [(y - 4)^2 - 3(x - 3)^2] \left| \frac{\sqrt{3}(x - 3) + (y - 4)}{\sqrt{3}(x - 3) - (y - 4)} \right|^{1/\sqrt{3}} = c$$

$$21. y = (7x - x^3)/2$$

$$22. xv^2(5x - 1) = 1$$

$$23. x^2 + x - 3xy - y^2 + 4y = 2$$

$$24. 3(v + 1) = (u + v) \ln |c(u + v)|$$

$$25. (x + y - 5)^2(x - 2y + 1) = c$$

$$26. \ln |x + 2y - 1| = y - 2x + c$$

$$27. u^3(2v - 1)(5v - 4) = 1$$

$$28. y = (19x^4 - 1)^{1/2}/\sqrt{2}$$

$$29. x^2 - 2x - 4y = 3y^2$$

$$30. y(y - 2x) = e^{-3x}$$

$$31. y + 2 \tan^{-1} \left( \frac{x - y + 2}{2} \right) = c$$

## البند ٣-٥

1.  $w = 2! 3! \dots (k-1)!$
2.  $w = 48e^{7x}$
3. مجموعة الثوابت  $\{0, -2, 3, 1\}$
7.  $y = -\frac{3}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{-x}\sin 2x + x^2$
8.  $y = -x^3 + x^2 + 2$
9.  $v = 3u - u \ln u + u (\ln |u|)^2 + \ln |u|$

## البند ٦-٥

1.  $4D^2 - 7D - 2$
2.  $6D^2 - 11D + 3$
3.  $D^3 + 2D^2 - D - 2$
4.  $2D^3 - 3D^2 + 1$
5.  $D^3 - 4D^2 + 5D - 2$
6.  $(D+2)(2D-1)$
7.  $(2D+3)(D-4)$
8.  $(D-1)(D+5)(D-4)$
9.  $D^2(D+3)(D-3)$
10.  $(D+2)(D-3)(D-1)$
11.  $(D-2)(D+3)(D^2+4)$
12.  $(D-1)^2(D-2)$
13.  $(D-1)^2(D^2+2)$
14.  $(D-4)(D^2+4D+5)$
15.  $(D+2)^3(2D-1)$
16.  $(D^2-7)(D+1)(D-1)$
17.  $(D-3)(D^2+3D+9)$
18.  $D^2 + 1 - x^2$
19.  $D^2 - 1 - x^2$
20.  $x D^2$
21.  $x D^2 - D$
22.  $x^2 D^2 + 2x D - 2$
23.  $x^2 D^2 + 2x D - 2$

## البند ٧-٥

1.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$
2.  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{-3x}$
3.  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{3x/2}$
4.  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4) e^{-2x}$
5.  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5) e^{-2x/3}$
6.  $y = c_1 e^{4x}$
7.  $w = 1! 2! 3! \dots (n-1)! e^{ax}$

البند ٢-٦

1.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
2.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$
3.  $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x}$
4.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$
5.  $y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-4x}$
6.  $y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 e^{3x}$
7.  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$
8.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}$
9.  $y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x/2} + c_3 e^{-2x}$
10.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x/2} + c_3 e^{x/3}$
11.  $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$
12.  $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-5x/2} + c_3 e^{-3x/2}$
13.  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x/2} + c_3 e^{3x/2} + c_4 e^x$
14.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-4x}$
15.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x/2} + c_4 e^{-x/3}$
16.  $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x/2} + c_4 e^{-3x/2}$
17.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x}$
18.  $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$
19.  $y = \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{1 - e^{-5}}$
20.  $y = e^{3x} + 3e^{-x}$
21.  $y = \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} - 2)$
22.  $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^{-(1+\sqrt{2})x} - e^{-(1-\sqrt{2})x})$
23.  $y = 2e^{-2x} - e^{3x}$

البند ٤-٦

1.  $y = (c_1 + c_2 x) e^x$
2.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{x/2}$
3.  $y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{3x}$
4.  $y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{-x/3}$
5.  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-x/2}$
6.  $y = (c_1 + c_2 x) e^x + (c_3 + c_4 x) e^{-x}$
7.  $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-2x}$
8.  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$
9.  $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{5x} + c_5 e^{-5x}$
10.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{x/2} + (c_3 + c_4 x) e^{-x}$
11.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x/2} + (c_3 + c_4 x) e^{2x}$
12.  $y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-5x} + (c_4 + c_5 x) e^{-x}$

$$13. y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + c_3 e^{(1+\sqrt{3})x} + c_4 e^{(1-\sqrt{3})x}$$

$$14. y = \frac{3}{4} (e^{-x} - e^{-5x})$$

$$15. y = e^{2(x-1)} - e^{x-1}$$

$$16. y = (1+x) e^{-2x}$$

$$17. y = (2-x) e^{-2x}$$

$$18. y = \frac{5}{36} \left( 1 - e^{-6x} + \frac{6}{5} x e^{-6x} \right)$$

$$19. y = 2 - e^{-x} - e^{-2x}$$

$$20. y = 2 - 2e^x + 2xe^x - \frac{x^2}{2} e^x$$

$$21. y(2) = 4e$$

$$22. y(2) = 3e^{-4} + 6$$

### المسألة ٦-٥

$$1. y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x \quad 2. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$3. y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \quad 4. y = e^{3x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$5. y = e^{2x} (c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)$$

$$6. y = e^{-x/3} \left[ c_1 \cos \frac{\sqrt{2}x}{3} + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}x}{3} \right]$$

$$7. y = e^{-2x} (c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x)$$

$$8. y = c_1 e^x + e^{-x/2} \left[ c_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right]$$

$$9. y = c_1 e^x + e^{-x} (c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

$$10. y = c_1 + c_2 x + e^{-x/2} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$$

$$11. y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} \cos 3x + c_4 e^{-x} \sin 3x$$

$$12. y = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x} + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x$$

$$13. y = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 x e^{-2x} + c_5 e^{3x}$$

$$14. y = (c_1 + c_2 x) \cos 3x + (c_3 + c_4 x) \sin 3x$$

$$15. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (c_3 + c_4 x) \cos 2x + (c_5 + c_6 x) \sin 2x$$

$$16. y = 2 \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$17. y = 2e^{-x} \cos x + 3e^{-x} \sin x$$

$$18. y = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$19. y = e^x - \cos 2x$$

$$20. y = \frac{e^{-x}}{6} \left[ \cos \sqrt{3}x - \sqrt{3} \sin \sqrt{3}x \right] - \frac{e^{2x}}{6}$$

المبحث ٧-٦

1.  $y = c_1 + c_2 e^{2x}$
2.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$
3.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x/2}$
4.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
5.  $y = c_1 e^{(9+3\sqrt{5})x/2} + c_2 e^{(9-3\sqrt{5})x/2}$
6.  $y = e^{-2x/3} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{3} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{3} x \right)$
7.  $y = c_1 e^{-x} + e^x (c_2 \cos \sqrt{2} x + c_3 \sin \sqrt{2} x)$
8.  $y = c_1 e^{2x} + e^{-2x} (c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$
9.  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x}$
10.  $y = c_1 e^{-x} + e^{2x} (c_2 + c_3 x)$
11.  $y = e^{-x} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$
12.  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x/2} + c_3 e^{-x/2}$
13.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{7})x} + c_3 e^{(-1-\sqrt{7})x}$
14.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} \cos x + c_3 e^{-x} \sin x$
15.  $y = (c_1 + c_2 x) \cos \sqrt{2} x + (c_3 + c_4 x) \sin \sqrt{2} x$
16.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{x/2} + c_3 e^{-3x/2}$
17.  $y = (c_1 + c_2 x) e^x + (c_3 + c_4 x) e^{-x} \cos 2x$   
 $+ (c_5 + c_6 x) e^{-x} \sin 2x + c_7 e^{-3x}$
18.  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + c_4 e^{2x} + e^{-x/2} (c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x)$   
 $+ (c_7 + c_8 x + c_9 x^2) e^{-3x} + \cos x + (c_{10} + c_{11} x + c_{12} x^2) e^{-3x} \sin x$
19.  $y = e^x (c_1 + c_2 x) c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$
20.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{-x} (c_3 + c_4 x)$
21.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x} + e^{-2x} (c_4 + c_5 x)$
22.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$
23.  $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$
24.  $y = c_1 e^{-2x} + e^{-x/2} (c_2 \cos x + c_3 \sin x)$
25.  $y = c_1 e^{-x} + e^{-3x} (c_2 \cos \frac{x}{2} + c_3 \sin \frac{x}{2})$
26.  $y = e^{3x} + e^{-2x}$
27.  $y = e^{-2x} (1 - x^2)$
28.  $y = e^{-x} + e^{-4x} - e^{-2x}$
29.  $y = e^{2x} - \sqrt{2} e^x \sin \sqrt{2} x$
30.  $y = e^{5x} - x e^{5x}$
31.  $y = k \sin 2x$  ثابت  $k$



32.  $y = 2 - 2e^x + 2xe^x - (1/2)x^2 e^x$

33.  $y = [1 + (9x/2)]e^{-5x/2}$

34.  $y = (-1/5)(e^{3x} + 4e^{-2x})$

35.  $y = e^{\pi(1-x)}[(\pi + \pi^{-1})x + 1 - \pi - \pi^{-1}]$

36.  $y = (1+x)e^x$

37.  $y = (1/9)[e^{3x} + e^{-3x} + 7]$

## البند ٧-٢

1.  $(D^2 - D - 2)y = 0$

2.  $(D^3 - 4D^2)y = 0$

3.  $(D^4 + D^3)y = 0$

4.  $(D^3 - 2D^2 + D - 2)y = 0$

5.  $[(D+1)^2 + 9]^2 y = 0$

6.  $(D^3 - D^2 + D + 39)y = 0$

7.  $[(D-a)^2 + b^2]y = 0$

8.  $(D^2 + 1)y = 0$

9.  $D^3(D^2 + 1)^2 y = 0$

10.  $(4D^3 + 4D^2 - D - 1)y = 0$

11.  $m = 0, 0, -2$

12.  $m = 0, 1, -1$

13.  $m = 3, 3, 3, i, -i$

14.  $m = 2 \pm 2i$

15.  $m = 0, 0, 1/2, 1/2$

16.  $m = 3, -3, -3$

17.  $m = \pm 2i$

18.  $m = \pm 2i$

19.  $m = \pm 2i$

20.  $m = 0, \pm 2i$

21.  $m = 0, 0$

22.  $m = \pm \frac{i}{2}, \pm \frac{i}{2}, \pm \frac{i}{2}$

23.  $m = 0, \pm 2i$

24.  $m = 2 \pm \sqrt{2}i$

25.  $m = 0, 0, 0, 1, -1$

26.  $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \pm i, \frac{1}{2} \pm i$

## البند ٧-٢

1.  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} - 6$

2.  $y = c_1 + c_2 e^{-x} + 3x$

3.  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{x}{2} + 1$

4.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^3$

5.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x^2 e^{-x} - 2 \cos 2x$

6.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 11x - 1$

7.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x)$

8.  $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + e^x$

9.  $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \frac{1}{4} \sin x$
10.  $y = e^{-x/2} \left[ c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right] + \frac{e^x}{3} (2x - x^2 - \frac{4}{3})$
11.  $y = e^{-3x} (c_1 + c_2 x) + \frac{1}{49} e^{4x} (\frac{2}{7} - x)$
12.  $y = c_1 e^{-x} - 5 + e^x (c_2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6})$
13.  $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - e^x$
14.  $y = (c_1 + 3x)e^{-x} + c_2 e^{2x} + x - 1$     15.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \cos x$
16.  $y = c_1 + 2x + e^x (c_2 + x) + e^{-x}/2$
17.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x$     18.  $y = c_1 e^{-x} + e^x (c_2 - 2x + 2x^2)$
19.  $y = e^{-x/2} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \sin x + 2 \cos x - x \cos x$
20.  $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 10x - 8 + \frac{e^{3x}}{2}$
21.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} \left( x^2 + \frac{5}{3} x + \frac{37}{18} - x e^x \right)$
22.  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{x^3}{2}$
23.  $y = c_1 e^x + e^{-2x} \left( c_2 + c_3 x - \frac{x^2}{6} \right)$
24.  $y = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{6}) + x - 13$
25.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x} (c_3 - x) + x + 1/2$
26.  $y = c_1 e^{2x} + e^{-3x} (c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) - \frac{1}{26} \left( x + \frac{1}{26} \right) + \left( \frac{x e^{-3x}}{58} \right) \left( \frac{5}{2} \cos 2x - \sin 2x \right)$
27.  $y = c_1 e^x + e^{-x} (c_2 - \frac{x}{4}) + c_3 \cos x + c_4 \sin x$
28.  $y = c_1 + c_2 x + e^x \left( c_3 + c_4 x + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^2}{2}$

$$29. y = \left( c_1 + \frac{x}{8} \right) e^{x/2} + c_2 e^{-x/2} + c_3 \cos \frac{x}{2} + c_4 \sin \frac{x}{2}$$

$$30. y = c_1 e^x + (c_2 + x) \cos x + (c_3 - x) \sin x$$

$$31. y = 2(e^{2x} - \cos x - 2 \sin x) \quad 32. y = \frac{5}{8} \left( e^{4x} + e^{-4x} - \frac{2}{5} \right)$$

$$33. y = 2e^{-x} (2 \sin 2x - \cos 2x + 1)$$

$$34. y = (2x - \pi) \cos x - \frac{11}{3} \sin x - \frac{8}{3} \cos 2x$$

$$35. y = e^x - 1$$

$$36. y = e^{-x} + \sin x - \cos x$$

$$37. y = \frac{1}{60} (e^{-4x} + 5 - 6e^x - 10e^{2x} + 70e^{3x})$$

$$38. y = \frac{3}{4} e^x + \frac{7}{12} e^{-x} - \frac{e^{2x}}{3} + \frac{\sin x}{2}$$

$$39. y = (1 + e^{-2x}) \sin x + (e^{-2x} - 1) \cos x$$

$$40. y = 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{e^{2x}}{2} - \frac{9}{2}$$

## التمرين ٧-٤

$$1. y = 4$$

$$3. y = -5$$

$$5. y = -2x^2$$

$$7. y = -8x$$

$$9. y = -3x^2/2$$

$$11. y = (3/8) \cos x$$

$$13. y = 2 \cos \sqrt{2} x$$

$$15. y = -\cos 3x$$

$$17. y = 6x + \frac{e^{2x}}{2}$$

$$19. y = e^x + 1 - x$$

$$21. y = -\frac{1}{5} \sin 2x$$

$$23. y = 2 \cos 3x$$

$$2. y = -1$$

$$4. y = 3$$

$$6. y = 5x/2$$

$$8. y = -6x^2$$

$$10. y = 5x^5/24$$

$$12. y = 2 \sin x$$

$$14. y = 2 \sin \sqrt{3} x/3$$

$$16. y = 2x + \frac{1}{4} - 3e^x$$

$$18. y = \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$20. y = 3e^x$$

$$22. y = \frac{3}{2} - x$$

$$24. y = \frac{1}{2} e^{-3x}$$

$$25. y = 4e^{-2x}$$

$$26. y = \frac{2}{3}e^{-2x}$$

$$27. y = -\frac{1}{3}e^x$$

$$28. y = -4 \sin x$$

$$29. y = 4 \cos x$$

$$30. y = 4 - 5x^2$$

$$31. y = \frac{3}{20}e^{2x}$$

$$32. y = -\frac{1}{4} \sin 2x$$

$$33. y = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$34. y = \frac{3}{20}e^{2x} - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$35. y = -\cos 2x$$

#### البند ٢-٨

$$1. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 1 - x$$

$$2. y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + e^x - x$$

$$3. y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2}(1 - x \sin 2x)$$

$$4. y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2}xe^x$$

$$5. y = c_1 \sin x + (c_2 - x) \cos x + \sin x \ln |\sin x|$$

$$6. y = c_1 \cos x + (c_2 + x) \sin x + \cos x \ln |\cos x|$$

$$7. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} \sec x$$

$$8. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sin x \ln |\csc x + \cot x|$$

$$9. y = e^{-x} (c_1 + c_2 x - \ln |1 - e^{-x}|) \quad 10. y_2 = x e^{2x}$$

$$11. y_2 = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$12. y_2 = x^4 \ln |x|$$

$$13. y_2 = 1$$

$$14. y_2 = x^2 + x + 2$$

$$15. y_2 = x \cos (\ln |x|)$$

$$16. y_2 = x$$

$$17. y_2 = x \ln |x|$$

$$18. y_2 = x^3$$

$$19. y_2 = x^2$$

$$20. y_2 = 3x + 2$$

$$21. y_2 = \frac{1}{2}[\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|]$$

$$22. y_2 = e^x, y_p = \frac{5}{7}e^{3x}$$

$$23. y_2 = x, y_p = 1$$

## البند ٢-٨

1.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^x - 1$
2.  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\sec 2x + \tan 2x|$
3.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{e^{3x}}{4}$
4.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \sin x - \cos x \ln |\sin x|$
5.  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x e^x \ln |x|$
6.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \sec x$
7.  $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + \frac{x}{4} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x \ln |\cos 4x|$
8.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2 + \sin x \ln |\sec x + \tan x|$
9.  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} [\cos 2x \ln |\csc 2x + \cot 2x| - 1]$
10.  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sin x \ln |\csc 2x + \cot 2x|$
11.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - e^x \sin^{-1} e^{-x} - \sqrt{1 - e^{-2x}}$
12.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \frac{1}{2} x e^x$
13.  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + 2x + \frac{x^2}{2}$
14.  $y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \frac{1}{16} e^{2x}$
15.  $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln |\sec x| - \sin x \ln |\sec x + \tan x|$
16.  $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^3 - 3 \cos x - (x - 3x^{-1}) \sin x$
17.  $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - \frac{x}{24}$

## البند ٥-٨

1.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} \ln (1 + e^{-2x})$
2.  $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x - \frac{1}{16} (\cos 4x) \ln |\sec 4x + \tan 4x|$

$$3. y = c_1 e^{3x/2} + c_2 x e^{3x/2} + \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{5x}}{49}$$

$$4. y = c_1 x + c_2 x^{-2} + 2x^{-2} \ln |x| + x \ln |x|$$

$$5. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - (1 - e^{2x})^{1/2} \quad 6. y = c_1 e^{-x} + c_2 (x - 1)$$

$$7. y = c_1 x + c_2 \left[ \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right], x \neq 1$$

$$8. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/2) [\tan x + \cos x \ln |\sec x + \tan x|]$$

$$9. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1 - x e^x + (e^x - e^{-x}) \ln (1 + e^x)$$

$$10. y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

$$11. y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$$

$$12. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/6) \sec x \tan x$$

$$13. y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} - e^{-3x} [e^x \sin e^x - \cos e^x]$$

$$14. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/6) \cot x \csc x$$

$$15. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \tan^{-1} e^{-x}$$

$$16. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x e^{-x} + \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \ln |1 - e^{-2x}|$$

$$17. y = c_1 e^x + c_2 (x + 1) - x^2$$

$$18. y = c_1 (5x - 1) + c_2 e^{-5x} - \frac{x^2 e^{-5x}}{10}$$

$$19. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{e^{3x}}{10} - \cos x \ln |\sec x + \tan x| - 1$$

$$20. y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{24} \sec^2 2x + \frac{1}{8} \sin 2x \ln |\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{8}$$

$$21. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x^2 + 3 + 3x \sin x + 3 \cos x \ln |\cos x|$$

$$22. y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{e^x}{5} - \frac{1}{2} \cos 2x \ln |\sec 2x + \tan 2x|$$

$$23. y = c_1 x + c_2 x^5 + c_3 x^{-1} - \frac{x^{-2}}{21}$$

$$24. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x \ln |\sec e^x|$$

$$25. y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \cos e^{-x}$$

$$26. y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^x \ln (1 + e^x)$$

## البند ٢-٩

1.  $2i, -2i$

3. 0

5. 0

7.  $0, i, -i$

9. 1, 2

11. 6, -1

13.  $0, 3i, -3i$

15.  $1/3$

2. 0, 1

4.  $i, -i$

6. none

8.  $2, -1/2$

10.  $-1+i, -1-i$

12.  $1, \frac{(-1 \pm \sqrt{3} i)}{2}$

14. 0

## البند ٥-٩

1.  $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n!} = a_0 e^{x^3/3}, -\infty < x < \infty$

2.  $y = a_0 + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < \infty$

3.  $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{a_0}{(1-x)}, |x| < 1$

4.  $y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-2)(3k-5)\dots 4.1}{(3k)!} x^{3k} \right] + a_1 \left[ x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-1)(3k-4)\dots 2.1}{(3k+1)!} x^{3k+1} \right], x < 0$

5.  $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, -\infty < x < \infty$

6.  $y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k x^{2k}}{2^k k!} \right] + a_1 \left[ x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k x^{2k+1} + 1}{3.5.7\dots(2k+1)} \right], -\infty < x < \infty$

$$7. y = a_0 \left( 1 - 2x^2 + \frac{x^4}{3} \right) + a_1 \left[ x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k (-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \dots (2k-5) x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

$$8. y = a_0 + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

$$9. y = a_0 (1 + 4x^2) + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{4n^2 - 1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1/2$$

$$10. y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$11. y = a_0 (1 - 3x^2) + a_1 \left( \frac{x - x^3}{3} \right), \quad -\infty < x < \infty$$

$$12. y = \frac{a_0}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) (2k+1) (2k+3) x^{2k} \\ + \frac{a_1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) (k+2) (2k+3) x^{2k+1}, \quad |x| < 1$$

$$13. y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k (k+1)}{2^{2k} (2k-1) (2k-3)} x^{2k} \right] + a_1 \left( x + \frac{5x^3}{12} \right), \quad |x| < 2$$

$$14. y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \dots (4k+1)}{(2k)!} x^{2k} \right] \\ + a_1 \left[ x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 7 \cdot 11 \cdot 15 \dots (4k+3)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right], \quad -\infty < x < \infty$$

$$15. y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+3)}{3} x^{2k+1}, \quad |x| < 1$$

$$16. y = a_0 \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)}{(18)^k (2k-1) k!} x^{2k} \right] + a_1 x, \quad -\infty < x < \infty$$



$$17. y = a_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{12}) + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(-1)^k}{2^{2k} k! (2k-3)(2k-1)(2k+1)} x^{2k+1}$$

$$18. y = a_0(1 + 2x^2) + a_1 \left[ x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \dots (4k-3)}{k! (4k^2-1)} x^{2k+1} \right], |x| < \frac{1}{2}$$

$$19. y = a_1 x + a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4k-5)}{2^k (2k-1) k!} x^{2k} \right], |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$20. y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 3(-1)^k \frac{(-1) \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4k-5)}{2^k k! (2k-3)(2k-1)} x^{2k} \right] \\ + a_1 \left( x + \frac{x^3}{3} \right), |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$21. y = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^{3k}}{3^k k! 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3k-1)} \right] \\ + a_1 \left[ (x-2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^{3k+1}}{3^k k! 4 \cdot 7 \dots (3k+1)} \right], -\infty < x < \infty$$

$$22. y = -2 \left[ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right] + 6x = 8x - 2e^x, -\infty < x < \infty$$

$$23. y = 4x^4 - 12x^2 + 3, -\infty < x < \infty$$

## البند ٢-١.

$$1. u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x}, v = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{6x}$$

$$2. v = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}, y = -c_1 \frac{e^{2x}}{2} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$3. u = c_1 e^x + c_2 x e^x, v = (c_1 - c_2) e^x + c_3 x e^x$$

$$4. y = c_1 e^{2t} \cos 2t + c_2 e^{2t} \sin 2t, z = -2c_1 e^{2t} \sin 2t + 2c_2 e^{2t} \cos 2t$$

$$5. v = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x + 1, y = c_1 \sin x - c_2 \cos x + x - 1$$

$$6. w = c_1 e^x + 2c_2 e^{4x}, y = -3c_2 e^{4x} + c_3 e^{-2x}$$

$$7. \quad x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} - 4e^t + \frac{1}{4}, \quad y = (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2 t e^{2t} - 8e^t - \frac{1}{4}$$

$$8. \quad v = \frac{c_1}{2} \sin x + \frac{c_2}{2} \cos x - 2c_3 \sin \sqrt{6}x - 2c_4 \cos \sqrt{6}x$$

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin \sqrt{6}x + c_4 \cos \sqrt{6}x$$

$$9. \quad x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t + e^t/5,$$

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - c_3 \sin 2t - c_4 \cos 2t - e^t/5$$

$$10. \quad y = x + 2 + c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x,$$

$$w = x + 6 + (c_2 - c_1)e^{-x} \cos 2x - (c_1 + c_2)e^{-x} \sin 2x$$

$$11. \quad y = c_1 e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5, \quad x = -c_1 e^{-t} + c_2 + \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 5t$$

$$12. \quad y = 3 \cos x + 3 \sin x + c_1 + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

$$v = \frac{c_1}{4} - \frac{1}{5} (c_2 - 3c_3) \cos 3x - \frac{1}{5} (3c_2 + c_3) \sin 3x$$

$$13. \quad v = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

$$y = -x + \frac{5}{2} c_2 \cos x - \frac{5}{2} c_1 \sin x + 2c_4 \cos 2x - 2c_3 \sin 2x$$

$$14. \quad x = c_1 e^t + e^{-t/2} (c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t)$$

$$y = c_1 e^t - \frac{1}{2} e^{-t/2} (c_2 + \sqrt{3} c_3) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2} e^{-t/2} (\sqrt{3} c_2 - c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$z = c_1 e^t + \frac{1}{2} e^{-t/2} (\sqrt{3} c_3 - c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{2} e^{-t/2} (\sqrt{3} c_2 + c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$15. \quad u = 3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-x} + 3c_3 e^{x/2}$$

$$v = 4c_1 e^{2x} - 5c_2 e^{-x} + c_3 e^{x/2}$$

$$w = -4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-x} - c_3 e^{x/2}$$

$$16. \quad x = -6c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-2t} + 2c_3 e^{3t}$$

$$y = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$$

$$z = 5c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$$

$$17. \quad y = a_1 + a_2 e^x + 3a_3 e^{4x}$$

$$v = b_2 e^x - a_2 x e^x - 16 a_3 e^{4x}$$

$$w = -a_1 + (b_2 - a_2) e^x - a_2 x e^x - 7 a_3 e^{4x}$$

## البند ٢-١٠

1.  $y' = u$  ,  $u' = -6u + 3y + e^x - 2$
2.  $y' = u$  ,  $u' = 3u - 5y + \sin x$
3.  $y' = u$  ,  $u' = -pu - qy + f(x)$
4.  $y' = u$  ,  $u' = v$  ,  $v' = 6v - 4u - y + e^t - t$
5.  $y' = u$  ,  $u' = v$  ,  $v' = -pv - qu - ry + f(x)$
6.  $y' = u$  ,  $u' = v$  ,  $v' = w$  ,  $w' = y$
7.  $x' = u$  ,  $y' = v$  ,  $u' = -9x + 4y + u + e^t - 1 + 2t^2 - 6t$  ,  
 $v' = 2x - 2y + 3t - t^2$
8.  $v' = 2w + 12e^{2x} - 6$  ,  $w' = v - w - 8e^{2x} + 4$
9.  $v' = 2w + e^{-x} - 1$  ,  $w' = -2v + 5e^x + 3 - 3e^{-x}$
10.  $y' = u$  ,  $u' = v$  ,  $v' = w$  ,  $w' = 6y - 2u + 3w$
11.  $x = c_1 e^{4t}$  ,  $y = \frac{4}{3} c_1 e^{4t}$   
 $x = c_2 e^{-4t}$  ,  $y = 4c_2 e^{-4t}$
12.  $x = c_1 e^t$  ,  $y = 2c_1 e^t$   
 $x = 0$  ,  $y = c_2 e^{-2t}$
13.  $x = c_1 e^{2t}$  ,  $y = -\frac{2}{3} c_1 e^{2t}$   
 $x = c_2 e^{-2t}$  ,  $y = -2c_2 e^{-2t}$
14.  $x = c_1$  ,  $y = -c_1$   
 $x = c_2 e^{2t}$  ,  $y = -\frac{c_2}{3} e^{2t}$
15.  $x = c_1 e^{2t}$  ,  $y = \frac{2}{3} c_1 e^{2t}$   
 $x = c_2 e^{6t}$  ,  $y = \frac{2}{5} c_2 e^{6t}$
16.  $x = c_1 e^t$  ,  $y = -c_1 e^t$  ,  $z = -2c_1 e^t$   
 $x = c_2 e^{3t}$  ,  $y = c_2 e^{3t}$  ,  $z = 0$   
 $x = c_3 e^{-2t}$  ,  $y = -c_3 e^{-2t}$  ,  $z = c_3 e^{-2t}$

## البند ٢-١٢

1.  $\frac{1}{s-6}$  ,  $s > 6$
2.  $\frac{s}{s^2+4}$  ,  $s > 0$
3.  $\frac{2}{(s+1)^2+4}$  ,  $s > -1$
5.  $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
6.  $\frac{1}{(s-4)^2}$  ,  $s > 4$
7.  $e^{-2s} \left( \frac{2s+1}{s^2} \right)$  ,  $s > 0$

8.  $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s}$  ,  $s > 0$
9.  $\frac{1-e^{6-3s}}{s-2} + \frac{e^{-3s}}{s}$  ,  $s > 2$
10.  $\frac{5}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{12}{s^3}$  ,  $s > 2$
11.  $\frac{2}{s^3} - \frac{3}{s^2} - \frac{6}{(s+1)^2+9}$  ,  $s > 0$
12.  $\frac{6}{(s-3)^2+36} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s-1}$  ,  $s > 1$
13.  $\frac{s+2}{(s+2)^2+3} - \frac{2}{(s+)^3}$  ,  $s > -2$
14.  $\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$  ,  $s > 0$
15.  $\frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2+9}$  ,  $s > 0$
16.  $\frac{2}{s^2+16}$
17.  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$  ,  $s > 4$
18. Piecewise continuous
19. Piecewise continuous
20. Neither
21. Continuous
22. Neither
23. Neither
25. دالة أسية
26. دالة أسية
27. دالة غير أسية
28. دالة أسية
29. دالة غير أسية

#### البند ١٢-٢

1.  $\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{5}{s}$  ,  $s > 0$
2.  $\frac{6}{s^3} - \frac{1}{s-2}$  ,  $s > 2$
3.  $\frac{3}{s} - \frac{5}{s-2} + \frac{4}{s^2+1} - \frac{7s}{s^2+9}$  ,  $s > 2$
4.  $\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{s-6} - \frac{4}{s}$  ,  $s > 6$
5.  $\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} - \frac{3}{s^2}$  ,  $s > 0$
6.  $\frac{2}{(s+2)^2+4} - \frac{2}{(s-3)^3}$  ,  $s > 3$

$$7. \frac{5s+11}{(s+2)(s+3)}, s > -2$$

$$8. \frac{s^4 + 4s^2 + 24}{s^5}, s > 0$$

$$9. \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}, s > -1$$

$$10. 24 \left( \frac{1}{s^5} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{2s^3} - \frac{1}{6s^2} + \frac{1}{24s} \right), s > 0$$

$$11. \frac{(s-2)^2 - 25}{[(s-2)^2 + 25]^2}, s > 0$$

$$12. \frac{2s+10}{(s-4)(s+2)}, s > 4$$

$$13. \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}, s > 0$$

$$14. \frac{3s}{4(s^2+1)} + \frac{s}{4(s^2+9)}$$

$$15. \frac{6-2s}{s^2+4s+8}$$

$$16. \frac{s}{2(s^2+9)} - \frac{s}{2(s^2+49)}$$

$$17. \frac{2(s+1)}{(s^2+2s+2)}$$

## المسند ١٢-٤

$$1. y = e^{-t} \cos 3t$$

$$2. y = \sin 2t$$

$$3. y = e^{-2t} (3 \cos 3t - 2 \sin 3t)$$

$$4. y = \frac{3}{16} t^2 e^{-5t/2}$$

$$5. \frac{1}{3} e^{-t} \sin 3t$$

$$6. y = (1-2t) e^{-2t}$$

$$7. y = e^{-3t} \left( \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t \right)$$

$$8. y = \frac{1}{2} e^{-4t} \cos \frac{\sqrt{47} t}{4} - \frac{5e^{-4t}}{2\sqrt{47}} \sin \frac{\sqrt{47} t}{4}$$

$$9. y = e^{2t} \left( 2 \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

$$10. y = e^{-4t} \left( 2t - \frac{5}{2} t^2 \right)$$

$$11. y = e^t \left( t + t^2 + \frac{t^3}{6} \right)$$

$$12. y = e^{-3t} (3 \cos 2t - 4 \sin 2t)$$

$$13. y = 2e^{-2t} \cos 3t + 4e^{-2t} \sin 3t$$

$$14. y = \frac{1}{6} t^2 e^t (t+3)$$

$$15. y = \frac{1}{2} e^{2t} (4 \cos 4t - 3 \sin 4t)$$

$$16. y = 3e^t - 2e^{-3t}$$

$$17. y = e^{-3t} (6e^{2t} + 2t - 1)$$

$$18. y = 3e^{2t} - e^{-t} - 2e^{3t}$$

19.  $y = \frac{9}{2} e^t - \frac{7}{2} e^{-3t}$
20.  $y = 8e^{2t} - e^{-t}(\cos 2t - 3 \sin 2t)$
21.  $y = \frac{1}{2} t^2 + \cos t - 1$
22.  $y = e^t - e^{-2t} + 2$
23.  $y = 3e^{2t} - 2t - 3$
24.  $y = e^t + e^{-2t} + t - 2$
25.  $y = \frac{(b \sin at - a \sin bt)}{ab(b^2 - a^2)}$

#### البند ١٢-٧

1.  $y = \frac{1}{216} (35e^{-3t} + 181 e^t) - \frac{1}{36} t e^t (1 - 3t)$
2.  $y = \left( \frac{t^2}{2} + 6t + 4 \right) e^{-t}$
3.  $y = e^t + 1$
4.  $y = 2e^t - 3$
5.  $y = e^{2t} + 2t - 1$
6.  $y = 2e^{3t} + \frac{1}{12} t^4 e^{3t}$
7.  $y = 3t e^t - e^{-6t}$
8.  $y = e^x + \cos 3x - 2 \sin 3x$
9.  $y = t + \pi \cos t + \sin t$
10.  $y = 2(e^t - \cos t - \sin t)$
11.  $y = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \cos \sqrt{2} t - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-2t} \sin \sqrt{2} t$
12.  $y = 2t^2 - 6t - 8e^{-t} + e^{-2t} + 7$
13.  $y = \cos t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$
14.  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^t \cos t + \frac{1}{2} e^t \sin t$
15.  $y = e^{2t} (1 + t) - \frac{1}{2} \sin 2t$

$$16. Y(s) = \frac{-s^2 + s - 1}{(s^2 + 1)(s - 1)(s - 2)}$$

$$17. Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2}$$

$$18. Y(s) = \frac{-s^3 - s^2 + 2}{s^3(s^2 + 6)}$$

$$19. Y(s) = \frac{s + 1}{s(s + 1)(s^2 + 4s + 6)}$$

$$20. Y(s) = \frac{2s^3 - 17s^2 + 28s - 12}{(s - 1)^2(s - 5)}$$

$$21. Y(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2}$$

$$22. Y(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s}{(s^2 + 1)(s - 1)^2}$$

$$23. Y(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} + \frac{Aw}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + w^2)}$$

$$24. Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s + e^{-3s}(2s + 1)}{s^2(s - 1)(s + 1)}$$

$$25. Y(s) = \frac{s^2 - 7s^2 + 24}{(s - 1)(s - 2)(s - 4)}$$

$$26. y(t) = 2e^t - \cos t - \sin t$$

$$27. y = 2 + e^t - 3e^{-2t} + e^{-3t}$$





ثبت المصطلحات العامية



## عربي / انجليزي

ratio test	اختبار النسبة
reduction of order	اختزال الرتبة
arbitrary	اختياري
linear independence	استقلال خطي
complex exponents	أسس مركبة
zeros of a function	أصفار الدالة
dependence	اعتماد
jump discontinuity	انفصال قفزي
damped vibration	اهتزاز متخامد
overdamped vibrations	اهتزازات مضمدة
elementary	أولي
pendulum	بندول
Laplace transform	تحويل لابلاس
inspection	تخمين
application	تطبيق
orthogonality	تعامدية
variation of parameters	تغير الوسطاء
convergence	تقارب
definite integral	تكامل محدد
constant	ثابت
root	جذر
partial	جزئي
simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
critically damped	حركة متخامدة تخامدا حرجا

real	حقيقي
particular solution	حل خاص
series solution	حل المتسلسلات
linear	خطي
periodic function	دالة دورية
continuous function	دالة متصلة
piecewise continuous function	دالة متصلة قطعيا
complementary function	دالة مكملية
period	دورة
order	رتبة
resonance	رنين
Wronskian	رونسكيان
capacity	سعة المكثف
necessary and sufficient condition	شرط لازم وكافي
method	طريقة
ordinary	عادي
integrating factor	عامل مكاملة
recurrence relation	علاقة تكرارية
non linear	غير خطي
non homogeneous	غير متجانس
undamped	غير متخمدة
superposition principle	قاعدة التركيب
initial value	قيمة ابتدائية
minimum	قيمة صغرى
maximum	قيمة عظمى

damped force	قوة متخامدة
polynomial	كثيرة حدود
partial fractions	كسور جزئية
sequence	متتالية
power series	متسلسلة قوى
orthogonal trajectories	مسارات متعامدة
adjoint	مرافق
derivative	مشتقة
separable equation	معادلة ذات متغيرات منفصلة
differential equation	معادلة تفاضلية
homogeneous equation	معادلة متجانسة
auxiliary equation	معادلة مساعدة
coefficient	معامل
undetermined coefficient	معاملات غير معينة
condenser	مكثف
operator	مؤثر
differential operator	مؤثر تفاضلي
singular point	نقطة شاذة
ordinary point	نقطة عادية
mathematical model	نموذج رياضي
plane trigonometry	هندسة مستوية
uniqueness	وحدانية
parameter	وسيط

## English / Arabic

adjoint	مرافق
application	تطبيق
arbitrary	اختياري
auxilliary equation	معادلة مساعدة
capacity	سعة المكثف
coefficient	معامل
complementary function	دالة مكملة
complex exponents	أسس مركبة
condenser	مكثف
constant	ثابت
continuous function	دالة متصلة
convergence	تقارب
critically damped	حركة متخامدة تخامدا حرجا
damped force	قوة متخامدة
damped vibration	اهتزاز متخامد
definite integral	تكامل محدود
dependence	اعتماد
derivative	مشتقة
differential equation	معادلة تفاضلية
differential operator	مؤثر تفاضلي
elementary	أولي
homogeneous equation	معادلة متجانسة
initial value	قيمة ابتدائية

inspection	تخمين
integrating factor	عامل مكاملة
jump discontinuity	انفصال تقري
Laplace transform	تحويل لابلاس
linear	خطي
linear independence	استقلال خطي
mathematical model	نموذج رياضي
maximum	قيمة عظمى
method	طريقة
minimum	قيمة صغرى
necessary and sufficient condition	شرط لازم وكافي
non homogeneous	غير متجانس
non linear	غير خطي
operator	مؤثر
order	رتبة
ordinary	عادي
orthogonality	تعامدية
orthogonal trajectories	مسارات متعامدة
ordinary point	نقطة عادية
overdamped vibrations	اهتزازات مضمدة
parameter	وسيط
partial	جزئي
partial fractions	كسور جزئية
particular solution	حل خاص
pendulum	بندول

period	دورة
periodic function	دالة دورية
piecewise continuous function	دالة متصلة قطعياً
plane trigonometry	هندسة مستوية
polynomial	كثيرة حدود
power series	متسلسلة قوى
ratio test	اختبار النسبة
real	حقيقي
recurrence relation	علاقة تكرارية
reduction of order	اختزال الرتبة
resonance	رنين
root	جذر
separable equation	معادلة ذات متغيرات منفصلة
sequence	متتالية
series solution	حل المتسلسلات
simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
singular point	نقطة شاذة
superposition principle	قاعدة التركيب
undamped	غير متخامدة
undetermined coefficient	معاملات غير معينة
uniqueness	وحدانية
variation of parameters	تغير الوسيط
Wronskian	رونسكيان
zeros of a function	أصفار الدالة



الكشاف



- اتصال قطعي ٢٦٢
- الاحلال ٧٨
- اختبار النسبة ١٨٢
- اختزال الرتبة ١٦٩
- لمعادلة غير متجانسة ١٧٣
- لمعادلة متجانسة ١٦٩
- ازالة ٢٣٢
- ازالة اسمية ١١٧
- الاستقلال القطعي ٩٩
- لمجموعة من الدوال ٩٩، ١٠١
- اعتماد ٩٩
- اهتزازات ٢٢٩
- المتخامدة ٢٤٠
- مخمدة ٢٤١
- غير المتخامدة ٢٣٣
- القسرية ٢٣٦
- ث
- ثابت اختياري ٨، ٦
- ثابت الزنبرك ٢٣

ب

البندول البسيط ٢٤٧

ج

- جذور المعادلة المسامدة ١٢٢
- المختلفة ١٢٣
- المنكورة ١٣٦
- المركبة ١٣٢، ١٣٦

ت

- تبريد ، قانون نيوتن ٥٥
- تحول كيميائي ٥٢
- تحويل لابلاس ٢٥٨
- لدالة ذات رتبة اسمية ٢٨٤
- للمشتقات العليا ٣٦٨

- ح
- حركة توافقية بسيطة ٢٣٥
- حركة متخامدة ٢٤٢
- تخامدا حرجا ٢٤٢
- حل خاص ١.٧
- حل صريح ٥ ، ١٢
- حل ضمني ٥ ، ١٢ ، ٢٣
- حل متسلسلة القوى ١٩٣ ، ١٩٨
- حل ، وجود ٤
- د
- رتبة المعادلة ٤
- رتين ٢٣٧
- رونسكيان ٩٩
- لجموعة حلول ١.٢ ، ١.٣
- لجموعة من الدوال ١٠٠
- ز
- زنبرك ٢٣٠
- س
- سعة المكثف ٢٤٩
- ط
- طريقة تحويل لابلاس
- لحل المسألة الابتدائية ٢٨٠
- التخمين ١٥٦
- تغير الوسطاء ٢٨٣
- الهدف الأولي ٢١٤
- اختزال الرتبة ١٦٩
- المعاملات غير المعينة ١٤٨
- ع
- عامل المكاملة لمعادلة خطية ٢٤
- بالتخمين ٦٧ ، ٦٨
- علاقة تكرارية ٢٠٠
- غ
- خاصية الازاحة ٢٦٦ .
- القاسية الخطية
- لتحويلات لابلاس ٢٦٠
- لتحويلات لابلاس العكسية ٢٧١
- للمؤثرات التفاضلية ١١٤
- خطي ، تشكيل ٩٨ ، ١١٧
- خطي ، خطية ٢٦
- د
- دالة تحليلية ١٩٦
- الدالة المتجانسة ٣٠
- دالة متصلة قطعيا ٢٦٢
- الدالة المكمل ١.٧
- داثرة RLC ٢٤٨
- داثرة كهربائية ٢٤٨

## غ

غير خطي ٤

غير متجانسة ٩٥

## ف

فرق الجهد ٢٤٩

فصل المتغيرات ١٩

## ق

قاعدة التركيب ١٥٩ ، ١٦٠

قانون نيوتن للتبريد ٥٥

قانون هوك ٢٢٠

قوانين كروتشوف ٢٤٩

قوة متخامة ٢٤٠

## ك

كسور جزئية ٢٧٢

## م

متسلسلة قوى

- تعريفها ١٩١

- تقاربها ١٩٢

- نصف قطرها ١٩٢

مسارات متعامدة ٥٠

مسالة القيمة الابتدائية ١٨

- معادلة تفاضلية ١٨ ، ٢٧٩

- لنظام من المعادلات ١٠٩

## م

معادلة بيرنولي ٨٠

... بمشتقات متفصلة ١٩ ، ٤٣

- بمعاملات ثابتة ٢٢

- بمعاملات في متغيرين ٨٢

المعادلة التامة ٢٥ ، ٤٣

... خطية متجانسة ٢٢ ، ٤٣

معادلة الرتبة الأولى ٢٧ ، ٢١٨

... غير متجانسة ٩٥ ، ١٤٣

- اختزال الرتبة ١٦٩

- تحويل لابلاس ٢٦٤

- تغير الوسيط ١٧٧

- المعاملات الثابتة ٩٥

- المعاملات المتغيرة ٩٥

- المؤثر التفاضلي ١٤٤

معادلة كوشي - أويلر ١٨١

معادلة لاجرانج ٨٧

المعادلة المساعدة ١٢٢

- ذات الجذور المتكررة ١٢٦

- ذات الجذور المختلفة ١٢٣

- ذات الجذور المركبة ١٢٠

المميز ٢٤١

المؤثر التفاضلي ١٠٧ ، ١١٢

## ن

نظرية أويلر ٧٧ (١٤)

نظرية وجود الحل ٩٧ ، ١٩٨

## ن

نقطة انفصال قفزي ٢٦٢

نقطة شالة ١٩٦

نقطة عادية ١٩٦ ، ٢٠٩

نموذج رياضي ٢ ، ٧ ، ٤٩

## د

وجود الحل ١٨

وحدانية الحل ١٨

وسطاء ، تغيير ١٧٧

## ي

يلاشي ١١٢





الدكتور سالم بن أحمد سحاب

المؤلف في بطلور ..

- من مواليد ١٣٧٤هـ .
- حصل على بكالوريوس العلوم في الرياضيات من جامعة الملك فهد للبترول والمعادن عام ١٣٩٦هـ .
- ابتعث في شهر محرم ١٣٩٧هـ إلى الولايات المتحدة الأمريكية للحصول على درجتي الماجستير والدكتوراه في الرياضيات .
- حصل على ماجستير العلوم في الرياضيات من جامعة ولاية كلورادو الأمريكية عام ١٣٩٩هـ .
- حصل على دكتوراه الفلسفة في الرياضيات من جامعة ولاية كلورادو الأمريكية عام ١٤٠١هـ .
- عُيِّن أستاذًا مساعدًا بقسم الرياضيات بجامعة الملك عبد العزيز في شهر شعبان من عام ١٤٠١هـ .
- رُفِيَ إلى مرتبة أستاذ مشارك في شهر جمادي الأولى من عام ١٤٠٨هـ .
- رُفِيَ إلى مرتبة أستاذ في أوائل عام ١٤١٣هـ .
- له عشرون بحثًا منشورًا ، وكتابان آخران .
- له مساهمات صحفية وإذاعية .

هذا الكتاب ..

تُعد المعادلات التفاضلية العادية من المواد الأساسية التي يركز عليها نمو الطالب العلمي في المجالات الرياضية والتطبيقية والهندسية . فهي تربط بين تجريد النظريات وواقع التطبيقات بأسلوب علمي سلس ..

وقد رُوِيَ في مادة هذا الكتاب خدمتها لقاعدة عريضة من الطلبة ، ولذا فقد أُوثر الابتعاد عن غلو التنظير والاكتفاء بالإشارة إلى التجريد الرياضي بالقدر القليل المناسب ، سواء كان ذلك نصًا أو برهانًا .

ويغطي هذا الكتاب المادة العلمية المطلوبة لمنهج يعادل ثلاث ساعات فصلية وربما يزيد قليلًا . أما المحتوى فربما كان قياسيًا لكثير من جامعات العالم ، وهو خاضع لمفردات المنهج التي أقرها قسم الرياضيات في جامعة الملك عبد العزيز بمكة .